



FAKULTÄT FÜR
INFORMATIK

Institut für
Intelligente Kooperierende Systeme
Master in Informatik

Masterarbeit

Schwärme in Vektorfeldern

Luigi Grimaldi
Matrikelnummer 195497

1. Gutachterin Prof. Sanaz Mostaghim
2. Gutachterin Dr.-Ing. Claudia Krull

Abstract

This thesis presents a new Explorative-PSO (EPSO) algorithm for optimizing a given objective function, which is disturbed by an unknown factor. Vector fields are chosen to represent these disturbance factors and are inspired by nature structures. The proposed method is a modified version of the Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm that additionally considers the correction of the forces caused by the selected vector fields to find the optimal solution. Furthermore the EPSO works with a multiswarm. Thus the executable tasks to find the global minimum can be separated and assigned on different swarms. The results show that the EPSO is able to optimize with an unknown disturbance factor. Moreover, it shows that some of the used vector fields have a positive impact on finding an optimal solution.

The proposed approach works as follows: The algorithm EPSO uses two swarms with different tasks. One of the swarms is responsible for the exploration of the environment and the creation of a map of the visited positions in the search space. The latter communicates in a parallelized process with the exploration swarm to receive the collected information of the created map. This map is used by the optimizer swarm to adjust the particle velocity in each iteration and to cancel out the disturbance factor.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VI
Tabellenverzeichnis	VIII
Symbolverzeichnis	X
1 Einleitung	1
1.1 Einführung	1
1.2 Motivation	2
1.3 Struktur der Arbeit	3
2 Grundlagen	4
2.1 Partikelschwarmoptimierung (PSO)	4
2.1.1 Grundzüge des PSO-Verfahrens	4
2.1.2 PSO-Algorithmus und die Bewegungsgleichung	5
2.1.3 Randbehandlung	8
2.2 2D-Vektorfelder	11
2.3 Interpolation	15
2.4 Stand der Forschung	16
3 Schwarmoptimierung in unbekanntem Vektorfeldern	18
3.1 Einschränkungen	19
3.2 Beschreibung des Suchraumes	19
3.3 Explorierende Partikel	19
3.4 Explorative-Partikelschwarmoptimierung (EPSO)	20
3.5 Einführung des VPSO-Verfahrens	21

Inhaltsverzeichnis

4	Implementierung der Simulation	23
4.1	Programm	23
4.2	Grafisches Userinterface	24
4.2.1	Aufbau der Benutzeroberfläche	24
4.2.2	Funktionsminima-Plot	25
4.2.3	Bewusstseins-Plot	26
4.2.4	Konvergenzrate	27
4.2.5	Erkundungs-Plot	28
4.2.6	Visualisierung der Optimierung des EPSO-Verfahrens	30
4.2.7	Vergleich der Algorithmen	31
4.2.8	Einstellbare Parameter	32
4.3	Statistikprogramm	34
4.3.1	Funktionsweise	34
4.3.2	Erfolgsrate	34
4.3.3	Standardabweichung	34
4.3.4	Tabellenaufbau	35
4.4	Parallelisierung	36
4.5	Fehler-Plot	37
4.6	Visualisierung der Bewegungskurve	38
4.7	Randbehandlung	41
5	Evaluation	42
5.1	Optimierungsfunktionen	42
5.1.1	Sphärische Funktion	42
5.1.2	Rosenbrock-Funktion	43
5.1.3	Ackley-Funktion	44
5.2	Simulation	45
5.2.1	Geschwindigkeitsbegrenzung	45
5.2.2	Verschiebung der Funktionsminima	46
5.2.3	Erzeugung von Testdaten	47
5.2.4	Auswirkungen von Vektorfeldern auf die Explorationsrate	47
5.2.5	Vergleich der Erfolgsraten für PSO, EPSO und VPSO	50
5.3	Simulationsergebnisse	55

Inhaltsverzeichnis

6	Fazit	57
6.1	Zusammenfassung	57
6.2	Weitere Probleme	58
6.3	Ausblick	60
	Literaturverzeichnis	61
A	Erkundungsraten	65
B	Fehler-Plots	67
C	Erfolgsraten	71
D	Mittlerer Fehler	73

Abbildungsverzeichnis

2.1	PSO-Bewegung eines Partikels	7
2.2	Methoden zur Repositionierung von Partikeln	10
2.3	Anpassung der Partikelgeschwindigkeit	10
2.4	Hyperbolische Methode	11
2.5	Beispiele für Vektorfelder	14
2.6	Bilineare Interpolation eines Vektorfeldes	15
4.1	Aufbau der grafischen Oberfläche	25
4.2	Funktionsminima-Diagramm in Kombination mit dem Bewusstseins-Plot .	26
4.3	Konvergenzraten der untersuchten Algorithmen	28
4.4	Beispiel einer Erkundungskurve	30
4.5	Veranschaulichung des EPSO-Verfahrens	31
4.6	Vergleich der Algorithmen bei der Optimierung	32
4.7	Funktionsweise der Parallelisierung	36
4.8	Legende eines Fehler-Plots	37
4.9	Abweichungen beim Testen von Paramter	37
4.10	Darstellung der Partikelbewegungen in verschiedenen Vektorfeldern	40
5.1	Sphärische-Testfunktion	43
5.2	Rosenbrock-Testfunktion	44
5.3	Ackley-Testfunktion	45
6.1	Auswirkung des Windes auf die Partikelbewegung	58
A.1	Erkundungsrate der verschiedenen Vektorfelder	66
B.1	Fehler-Plots einer durchgeführten Simulation für die sphärische Testfunktion	68
B.2	Fehler-Plots einer durchgeführten Simulation für die Rosenbrock-Testfunktion	69
B.3	Fehler-Plots einer durchgeführten Simulation für die Ackley-Testfunktion .	70

Abbildungsverzeichnis

C.1 Legende für die Tabellen B.1 - B.3 71

Tabellenverzeichnis

4.1	Aufbau einer Statistiktabelle	35
5.1	Klassifizierung der Erfolgsraten für die sphärische Funktion	53
C.1	Erfolgsrate für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion	71
C.2	Erfolgsrate für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion	72
C.3	Erfolgsrate für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion	72
D.1	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 1	73
D.2	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 2	73
D.3	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 3	74
D.4	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 4	74
D.5	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 5	75
D.6	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 1	75
D.7	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 2	76
D.8	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 3	76
D.9	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 4	77
D.10	Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 5	77

Tabellenverzeichnis

D.11 Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 1	78
D.12 Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 2	78
D.13 Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 3	79
D.14 Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 4	79
D.15 Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 5	80

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

Symbol	Bedeutung
a	Skalar a
\vec{x}	Vektor \vec{x}
\mathbf{A}	Matrix \mathbf{A}

Symbole für die Simulation

Symbol	Bedeutung
\vec{p}_i	Beste gespeicherte Position eines Partikels
\vec{p}_g	Beste Position des Schwarmes
ω	Trägheitsfaktor
ϕ	Gewichtung des kognitiven und sozialen Terms der Bewegungsgleichung
N_{opt}	Schwarmgröße der optimierenden Partikel
N_{expl}	Schwarmgröße der explorierenden Partikel
VMap	Informationsmatrix
V_1	Vektorfeld "Cross"
V_2	Vektorfeld "Rotation"
V_3	Vektorfeld "Sheared"
V_4	Vektorfeld "Wave"
V_5	Vektorfeld "Tornado"
F_1	Sphärische Testfunktion
F_2	Rosenbrock-Testfunktion
F_3	Ackley-Testfunktion

Abkürzungsverzeichnis

Kurzform	Beschreibung
<i>PSO</i>	Partikelschwarmoptimierung
<i>EPSO</i>	Explorative-Partikelschwarmoptimierung
<i>VPSO</i>	Partikelschwarmoptimierung mit der Berücksichtigung eines Störfaktors

1 Einleitung

1.1 Einführung

In der Informatik können komplexe Probleme mithilfe von verschiedensten Konzepten gelöst werden. Ein Bereich in der Informatik beschäftigt sich mit der Lösung solcher Probleme durch selbst organisierende Systeme, die auf biologischer oder natürlicher Intelligenz beruhen und als intelligente Systeme bezeichnet werden. Die Schwarmintelligenz oder die kollektive Intelligenz wird von natürlichen Schwärmen und Kolonien inspiriert, denn diese unterliegen gewissen Gesetzmäßigkeiten. So versuchen die Individuen innerhalb eines Schwarmes stets bei der Gruppe zu bleiben, Aufgaben innerhalb der Gruppe zu verteilen oder der Gruppenbewegung zu folgen. Die Interaktion von Agenten oder Individuen innerhalb eines Schwarmes und der Austausch von Informationen erzeugen ein problemlösendes System [Eng07].

Einer der Vorteile von Schwärmen oder Kolonien ist die Flexibilität und somit die Anpassung an die stetig verändernde Umgebung. Des Weiteren ist die Robustheit durch viele Individuen innerhalb einer Kolonie gegeben, sodass einzelne Individuen, die ihre Aufgabe nicht ausführen oder erfüllen können, von der Kolonie aufgefangen werden und trotzdem problemlos funktionieren können. Ein weiterer wichtiger Vorteil sind die kognitiven Fähigkeiten eines Individuums einer Kolonie. Diese sind begrenzt und folgen einfachen Regeln, wodurch eine einfache abstrakte Implementierung möglich wird [EB99]. In dieser Arbeit werden mehrere Schwärme genutzt, um die Aufgabe einer Optimierung durchzuführen. Die Umgebung ist für die Individuen des Schwarmes unbekannt. Hierfür werden die bevorstehenden Aufgaben auf zwei Schwärme verteilt. Dabei muss die Umgebung erkundet und gleichzeitig in einem parallelen Vorgang die vorgegebene Fitnessfunktion optimiert werden. Die Schwierigkeit hierbei ist es, die Optimierung in einem unbekanntem Suchfeld durchzuführen, wobei die Schwärme durch statische Windfelder gestört werden. Eine ständige Kommunikation beider Schwärme ist notwendig, um die

1 Einleitung

gesammelten Informationen des erkundeten Umfelds zu nutzen und die Geschwindigkeit der Individuen im Optimierungsverfahren zu korrigieren.

1.2 Motivation

Für die Verwendung von Drohnen in Situationen, die gefährlich sind für den Menschen, wie zum Beispiel bei Bergungsaktionen in Naturkatastrophengebiete oder Störungen bei Nuklearreaktoren, ist eine präzise Steuerung der Drohne notwendig. Ein optimales Szenario wäre eine vollautomatisierte Steuerung der Drohnen ohne menschlichen Eingriff. Doch für eine automatisierte Steuerung sind viele unbekannte Störfaktoren im Einsatzgebiet vorhanden, wie zum Beispiel Wind. Errechnete meteorologische Wetterkarten könnten im Vorfeld genutzt werden, um unbekannte Gebiete zu erkunden, jedoch können sich diese Wetterkarten unerwartet ändern und die Agenten zum Sturz bringen, wodurch erhebliche Kosten bei der Reparatur oder durch einen Neukauf entstehen. Die Möglichkeit einen Störfaktor in einem unbekanntem Gebiet auszugleichen, könnte zu einem Fortschritt beim Einsatz von Drohnen führen.

Ein weiteres Problem aus der realen Welt ist der begrenzte Energiespeicher von Drohnen. Bei den oben genannten Störfaktoren kann die Bewegung der Drohne ineffizient sein, wenn sie sich zum Beispiel gegen den Wind fortbewegt. Eine Maßnahme wäre es, einen günstigeren Pfad auszuwählen, der eventuell länger zum Zielpunkt ist, aber durch die Nutzung des Windes mehr Energie einsparen würde.

Des Weiteren wird in der Robotik-Theorie die Partikelschwarmoptimierung für komplexe mehrdimensionale Probleme genutzt, um gegebene Funktionen zu optimieren. Hierbei kann es sinnvoll sein, Wind als Störfaktor zu verwenden, wenn zum Beispiel die Zielfunktion viele lokale Minima besitzt. Der Wind könnte den verwendeten Schwarm aus den lokalen Minima tragen und dabei helfen eine bessere Lösung zu finden.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Simulation der obigen genannten Szenarien. Dabei werden zwei Probleme genauer untersucht und evaluiert. Das erste Problem beschäftigt sich damit, ob es möglich ist, dass ein Schwarm in einer unbekanntem Umgebung mithilfe der Partikelschwarmoptimierung das Minimum finden kann bei gegebener Zielfunktion, wenn dieser Schwarm von Störfaktoren, wie zum Beispiel Wind, beeinflusst wird. Das zweite Problem besteht darin, ob ein Vektorfeld dem Optimierungsverfahren und den Partikeln helfen kann, eine bessere Lösung zu finden.

1.3 Struktur der Arbeit

In dieser Arbeit wird zunächst in Kapitel 2 auf die Schwarmtheorie und die dazugehörigen grundlegenden Formeln und Konzepte eingegangen, die im Kapitel Kapitel 3 bei der Umsetzung des Konzeptes notwendig sind. In Kapitel 3 wird das Konzept und die Ideen der Arbeit, die umgesetzt worden sind, vorgestellt und erklärt. Das darauffolgende Kapitel 4 beschreibt die Umsetzung und die Implementierung der Visualisierung des Algorithmus im Detail. Hier werden auch die erzeugten Diagramme erläutert, die für die Evaluation notwendig sind. Das Kapitel 5 beinhaltet die Beschreibung der getesteten Optimierungsfunktionen sowie die Evaluierung der Simulationsergebnisse für jede einzelne Optimierungsfunktion. Im letzten Kapitel werden die Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst, offene Probleme erläutert und Verbesserungen dargestellt und erklärt. Zum Schluss wird ein Ausblick gegeben auf zukünftige Aufgaben- und Problemstellungen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden wichtige Grundlagen und Konzepte vorgestellt, die essentiell für diese wissenschaftliche Arbeit sind. Im Abschnitt 2.1 wird die Partikelschwarmoptimierung eingeführt. Dabei wird auf die Implementierungsweise des Verfahrens eingegangen mit der grundlegenden Bewegungsgleichung sowie einige Anwendungsgebiete der Partikelschwarmoptimierung vorgestellt. Die Einführung in zweidimensionale Vektorfelder wird im Abschnitt 2.2 dargestellt. Diese Vektorfelder nehmen in späteren Kapiteln der Arbeit eine besondere Rollen ein. Weiter im Abschnitt 2.3 wird die Interpolation vorgestellt. Dieses Werkzeug dient zum Beispiel dazu aus unvollständigen Daten, ein kontinuierliches Spektrum von Daten zu erzeugen. Im letzten Abschnitt 2.4 wird der Stand der Forschung vorgestellt, wodurch diese Arbeit in einen wissenschaftlichen Kontext gebracht wird.

2.1 Partikelschwarmoptimierung (PSO)

2.1.1 Grundzüge des PSO-Verfahrens

Die Partikelschwarmoptimierung, im Weiteren abgekürzt als *PSO* bezeichnet, ist ein naturanaloges Optimierungsverfahren. Dies bedeutet, dass die Funktion des Algorithmus von biologischen Strukturen, wie Vogel- oder Fischeschwärmen, inspiriert ist [KE01]. Der Algorithmus wurde erstmals im Jahr 1995 von Russel Eberhart und James Kennedy vorgestellt [EK95]. Diese Art von Optimierung gehört zu dem Bereich der Metaheuristiken. Stochastische Optimierungsverfahren werden als Metaheuristiken bezeichnet, da sie ein gewisses Maß an Zufälligkeit benötigen, um eine möglichst genaue, oder auch optimale Lösung zu finden. Diese Art von Optimierungsverfahren hat ein weites Anwendungsgebiet. Metaheuristiken sind im Gegensatz zu problemspezifischen Heuristiken, die nur

2 Grundlagen

auf ein bestimmtes Optimierungsproblem angewendet werden können, allgemeiner. Sie definieren eine abstrakte Reihenfolge von ausführbaren Schritten, die in der Theorie auf beliebige Problemstellungen angewandt werden können. Metaheuristiken können bei Problemen angewendet werden, bei denen kein effizienter Lösungsalgorithmus bekannt ist. Durch eine Fitnessfunktion, die vorgegeben werden muss, um die gefundene Lösung zu bewerten, versucht der *PSO* durch die Bewegung von Partikeln, die einer Schwarmpopulation angehören, eine annähernd oder optimale Lösung zu finden. Dabei repräsentiert jedes Partikel eine mögliche Lösung [Luk13].

Die praktische Anwendung der Partikelschwarmoptimierung findet in vielen Bereichen statt, wie in der künstlichen Intelligenz bei der Erzeugung von Strukturen von künstlichen neuronalen Netzen oder auch bei der Wahl von Gewichtungen der Neuronen. Weitere Bereiche sind zum Beispiel die Abschätzung von Ladezuständen von Batterien oder aber auch die Überwachung elektrischer Leistung und Spannungen von Stormnetzen [GP11, KEP09]. In der Theorie kann die Partikelschwarmoptimierung für viele Probleme angewendet werden. Bekannte Beispiele hierfür sind das Problem des Handlungsreisenden, auf Englisch "Traveling Salesman Problem" oder das Rucksackproblem, auf Englisch "Knapsack Problem" [Cle06b].

2.1.2 PSO-Algorithmus und die Bewegungsgleichung

Die Partikelschwarmoptimierung verwendet einen Schwarm aus Partikeln. Die Partikel bewegen sich durch den Suchraum, wobei ihre Position durch die gesammelten Informationen der Nachbarn und der eigenen Erfahrungen beeinflusst wird. Jedes Partikel i in der Optimierung hat eine Position $\vec{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ im Suchraum zu einem bestimmten Zeitpunkt t , wobei t in diesem Fall diskrete Zeitzustände beschreibt. Des Weiteren wird die Position eines Partikels durch eine hinzuaddierte Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t+1)$ verändert. So folgt die Position zum nächsten Zeitpunkt:

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t+1). \quad (2.1)$$

Die Geschwindigkeit der einzelnen Partikel wird wie folgt berechnet:

$$\vec{v}_i(t+1) = \omega \vec{v}_i(t) + \phi_1(\vec{p}_i - \vec{x}_i(t)) + \phi_2(\vec{p}_g - \vec{x}_i(t)). \quad (2.2)$$

2 Grundlagen

Die grundlegende Bewegungsgleichung setzt sich aus drei Komponenten zusammen. Der erste Term beschreibt die Bewegung des Partikels i .

$$\omega \vec{v}_i(t) \quad (2.3)$$

Dabei ist $\omega > 0$ und beschreibt den Trägheitsfaktor. Dieser Trägheitsfaktor gewichtet die vorherige Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$ vom Partikel für die nächste Aktualisierung der Geschwindigkeit. Kleine Werte für den Trägheitsfaktor wirken sich auf eine lokalere Suche aus, größere hingegen auf eine globalere Suche des Schwarmes.

Der mittlere Term entspricht der kognitiven Komponente:

$$\phi_1(\vec{p}_i - \vec{x}_i(t)) \quad (2.4)$$

$\vec{p}_i \in \mathbb{R}^n$ repräsentiert die beste erreichte Position des i -ten Partikels zur Zeit t und entspricht in der Optimierung dem minimalen Funktionswert in Bezug auf die schon besuchten Punkte des Partikels. Dieser Wert wird auch als "local best" bezeichnet. Der letzte Term beschreibt die soziale Komponente:

$$\phi_2(\vec{p}_g - \vec{x}_i(t)) \quad (2.5)$$

Die Komponente $\vec{p}_g \in \mathbb{R}^n$ repräsentiert die beste Position innerhalb des Schwarms und wird auch als "global best" bezeichnet. Ein Schwarm hat die Größe N und der Index i läuft von i bis N [KE01].

Die Parameter ϕ_1 und ϕ_2 dienen zur Gewichtung der kognitiven und sozialen Komponente der Bewegungsgleichung. Die Gewichtungen ϕ_1 und ϕ_2 sind Produkte zweier Faktoren:

$$\phi_1 = c_1 * R_1, \quad (2.6)$$

$$\phi_2 = c_2 * R_2. \quad (2.7)$$

Die Faktoren c_1 und c_2 sind konstante Parameter, die auch als Beschleunigungskoeffizienten bezeichnet werden. Die Faktoren R_1 und R_2 sind zufällige Zahlen, die einem Wert aus einer Gleichverteilung im Bereich $[0, 1]$ zugeschrieben werden [GP11].

Die Abbildung 2.1 veranschaulicht die Berechnung der Bewegung eines Partikels für einen Zeitschritt t und $t + 1$. Die Vektoren, die in die Berechnung mit eingehen, sind die vorherige Geschwindigkeit, die kognitive und die soziale Komponente. \vec{p}_g entspricht

2 Grundlagen

hierbei dem "global best", also der besten besuchten Position innerhalb des Schwarms von allen Partikeln und \vec{p}_i oder auch "local best" beschreibt die beste Position des jeweiligen einzelnen Partikels.

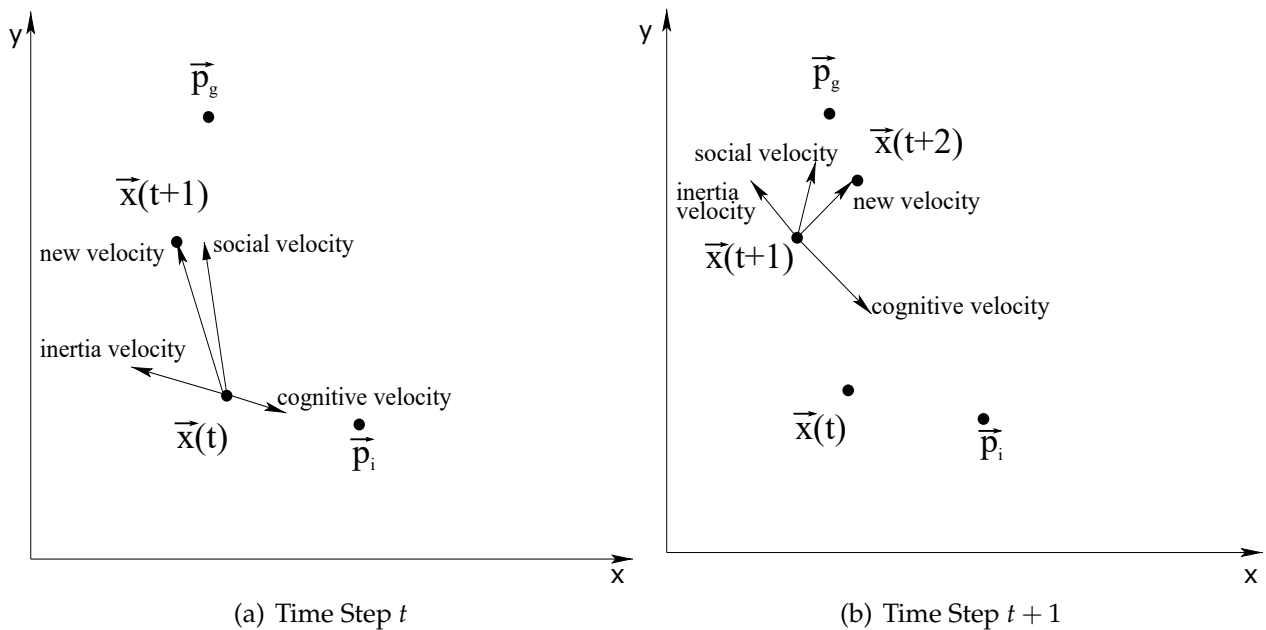


Abbildung 2.1: PSO-Bewegung eines Partikels

Im Allgemeinen wird der grundlegende PSO-Algorithmus wie in 1 implementiert. In jeder Iteration wird für jedes Partikel kontrolliert, ob dieses ein neues lokales Optimum oder auch ein besseres globales Optimum gefunden hat. Falls dies der Fall ist wird \vec{p}_i oder \vec{p}_g erneuert. Des Weiteren wird die Position und Geschwindigkeit von den Partikeln mit den vorherigen vorgestellten Gleichungen aktualisiert [Eng07].

Algorithmus 1 gbest PSO

Erzeugung und Initialisierung eines n -dimensionalen Schwarms der Größe N ;
for Für jedes Partikel $i = 1, \dots, N$ **do**
 Aktualisierung der persönlichen besten Position
 if $f(\vec{x}_i) < f(\vec{p}_i)$ **then**
 $\vec{p}_i = \vec{x}_i$
 end if
 Aktualisierung der globalen besten Position
 if $f(\vec{p}_i) < f(\vec{p}_g)$ **then**
 $\vec{p}_g = \vec{p}_i$
 end if
end for
for Für jedes Partikel $i = 1, \dots, N$ **do**
 Aktualisiere die Geschwindigkeit mit der Gleichung 2.2
 Aktualisiere die Position mit der Gleichung 2.1
end for

2.1.3 Randbehandlung

Es gibt unterschiedliche Randbehandlungen für die Partikelschwarmoptimierung, um zu verhindern, dass einzelne Partikel den Suchraum verlassen oder sich neu positionieren, falls dieser Fall eintreten würde. In diesem Abschnitt werden drei Strategien und zugehörige Konzepte vorgestellt [SHM13].

1. Ändern der Aktualisierung der lokalen/globalen besten Position von Partikeln

Die einfachste Variante mit Partikeln umzugehen, die den Suchraum verlassen, ist das Problem zu ignorieren. Die Geschwindigkeit und Position wird nicht angepasst. Die Partikel können den Suchraum verlassen, aber werden nicht mehr in Betracht gezogen für die globale beste, beziehungsweise für die lokale beste Position. Die Berechnung wird hierbei übersprungen, da diese Partikel einen hohen Fitnesswert haben [BK07].

2. Position der Partikel verändern

Die zweite Strategie befasst sich mit der Repositionierung der Partikel, wenn diese den Suchraum verlassen. Die erste Methode "Nearest" 2 setzt Partikel, die den Suchraum verlassen haben auf den Rand des Suchraumes zurück. Die Berechnung sieht wie folgt aus und ist für jede Dimension i durchzuführen:

2 Grundlagen

Algorithmus 2 Nearest

```
// Überschreitung der Grenze  $X_{i,\max}$   
if  $X_{i,t+1} > X_{i,\max}$  then  
     $X'_{i,t+1} = X_{i,\max}$   
end if  
// Unterschreitung der Grenze  $X_{i,\min}$   
if  $X_{i,t+1} < X_{i,\min}$  then  
     $X'_{i,t+1} = X_{i,\min}$   
end if
```

Die Pbest Methode ist eine weitere Methode, um unzulässige Partikel zu behandeln. Diese unzulässigen Partikel werden in dieser Methode beim Verlassen des Suchraumes auf die beste besuchte Position des jeweiligen Partikels zurückgesetzt [SMW06].

Des Weiteren gibt es die Methode, die die ungültigen Partikel in den Suchraum spiegelt, beziehungsweise reflektiert. Diese Methode wird als "Reflect"³ bezeichnet und kann wie im folgenden Algorithmus berechnet werden.

Algorithmus 3 Reflect

```
// Überschreitung der Grenze  $X_{\max}$   
if  $X_{t+1} > X_{\max}$  then  
     $X'_{t+1} = X_{\max} - (X_{t+1} - X_{\max})$   
end if  
// Unterschreitung der Grenze  $X_{i,\min}$   
if  $X_{t+1} < X_{\min}$  then  
     $X'_{t+1} = X_{\min} + (X_{\min} - X_{t+1})$   
end if
```

In der Abbildung 2.2 werden alle drei Varianten in einem zweidimensionalen Suchraum dargestellt, die zur Repositionierung von Partikeln dienen, wenn die Partikel den Suchraum verlassen.

Diese Varianten repositionieren nur die Partikel, die Geschwindigkeit wird nicht verändert. Wenn die Geschwindigkeit der Partikel nicht betrachtet wird, können diese Partikel im nächsten Iterationsschritt wieder den Suchraum verlassen, da die Partikelgeschwindigkeit in dieselbe Richtung unverändert bleibt. Um dies zu verhindern wird auch die Geschwindigkeit der repositionierten Partikel aktualisiert und verändert [SH09].

Drei dieser Varianten, für die Veränderung der Geschwindigkeit, werden nun kurz Anhand der Methode "Nearest" in Abbildung 2.3 visualisiert und erläutert.

In Abbildung 2.3 sind drei mögliche Anpassungen für die Partikel zu sehen, die mit der

2 Grundlagen

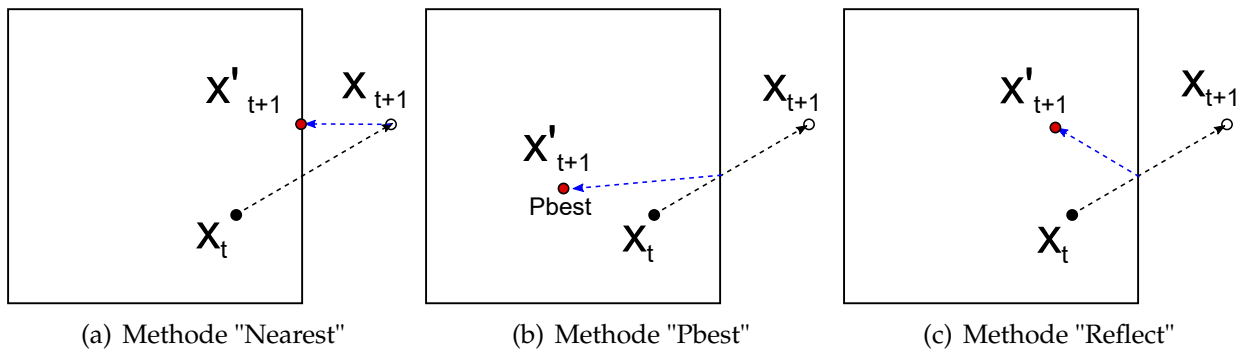


Abbildung 2.2: Methoden zur Repositionierung von Partikeln

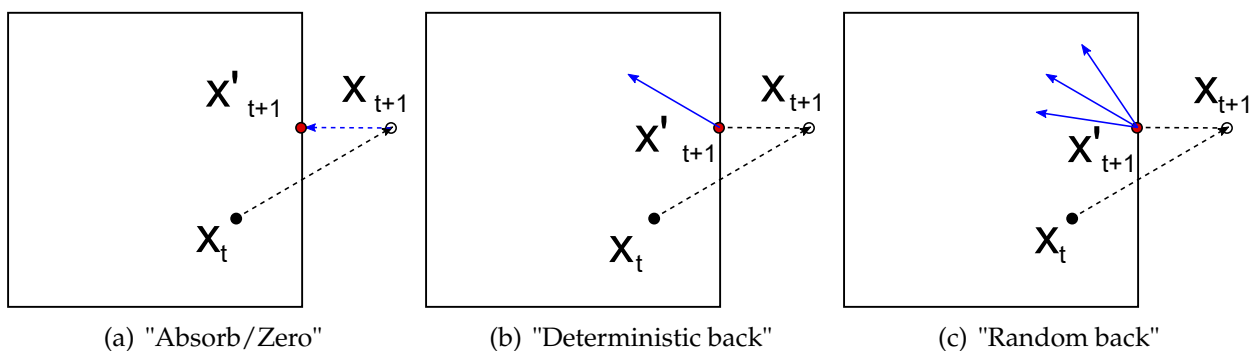


Abbildung 2.3: Anpassung der Partikelgeschwindigkeit

Methode "Nearest" auf den Rand des Suchraumes zurückgesetzt werden, wenn diese den Suchraum verlassen. In Abbildung 2.3(a) wird die Geschwindigkeit des Partikels auf 0 reduziert. Die Aktualisierung der Geschwindigkeit im nächsten Iterationsschritt ist $V_{i,t+1} = 0$.

In Abbildung 2.3(b) wird die Geschwindigkeit, die beim Verlassen des Suchraumes vorhanden ist, umgekehrt und das Partikel wird wieder in den Suchraum gelenkt.

In der letzten Abbildung 2.3(c), erhält das ungültige Partikel eine neue zufällige Geschwindigkeit, die das Partikel zurück in den Suchraum bewegt.

3. Verhindern von ungültigen Bereichen

Die dritte Strategie, um ungültige Partikel zu behandeln, ist das Verlassen des Suchraumes zu verhindern. Dabei wird die Geschwindigkeit der Partikel angepasst, sodass diese immer im Suchraum bleiben und dadurch auch die Geschwindigkeit nicht mehr im Nachhinein angepasst werden muss. Eine Methode, die diese Strategie nutzt, ist die hyperbolische Methode und wird auch als "hyperbolic" bezeichnet [Cle06a].

2 Grundlagen

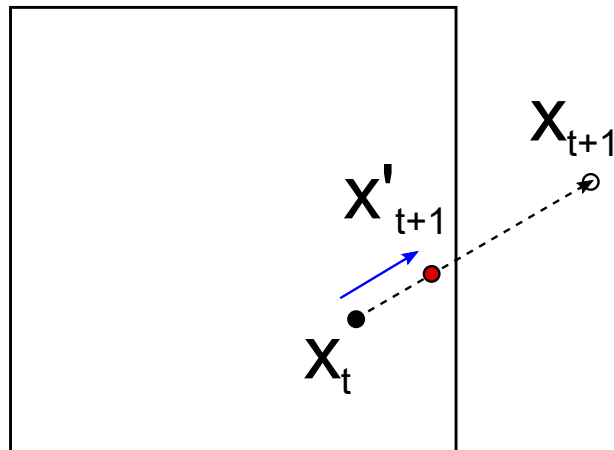


Abbildung 2.4: Hyperbolische Methode

In Abbildung 2.4 wird die hyperbolische Methode dargestellt. Das Partikel bleibt im gültigen Suchraum, durch die Normalisierung der neuen Geschwindigkeit $V_{i,t+1}$, die wie im Folgenden berechnet wird.

Algorithmus 4 Hyperbolic

if $V_{i,t+1} > 0$ **then**

$$V_{i,t+1} = \frac{V_{i,t+1}}{1 + \left| \frac{V_{i,t+1}}{x_{i,\max} - x_{i,t}} \right|}$$

else

$$V_{i,t+1} = \frac{V_{i,t+1}}{1 + \left| \frac{V_{i,t+1}}{x_{i,t} - x_{i,\min}} \right|}$$

end if

Je näher das Partikel sich zum Rand bewegt, desto geringer wird die Geschwindigkeit, wodurch verhindert wird, dass das Partikel gar nicht erst den Rand erreichen kann.

2.2 2D-Vektorfelder

Vektorfelder können im Allgemeinen physikalische Größen beschreiben, wie zum Beispiel die Stärke und Richtung eines Magnetfeldes oder der Gravitation, aber auch Bewegungsflüsse von Personen in einem Einkaufszentrum. In dieser Arbeit werden unterschiedliche

2 Grundlagen

2D-Vektorfelder erzeugt, die möglichst reale und vereinfachte Winde aus der Natur darstellen sollen. Diese Vektorfelder dienen als Störfaktoren des PSO-Algorithmus.

Ein zweidimensionales Vektorfeld entspricht einer Abbildung, die jedem Punkt (x, y) einen Vektor \vec{v} in dem Definitionsbereich zuweist. Dies wird mathematisch in der analytischen Schreibweise wie folgt beschrieben :

$$\vec{v} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.8)$$

$$(x, y) \rightarrow \vec{v}(x, y) = \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Die Darstellung des Vektorfeldes in Gleichung 2.9 ist in der Komponentenschreibweise dargestellt [Hof16, Oli13].

Üblicherweise sind diskrete Daten vorhanden wofür die folgende Schreibweise gilt:

$$(x, y) \rightarrow \vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_i, i \in [0, \dots, N]. [\text{Kur17}] \quad (2.10)$$

In der folgenden Abbildung 2.5 werden grundlegende und unterschiedliche Vektorfelder vorgestellt, die in dieser Arbeit untersucht werden. Die ausgesuchten Vektorfelder repräsentieren möglichst vereinfachte Strukturen von realen Windkarten.

In Abbildung 2.5(a) wird ein lineares Vektorfeld dargestellt, welches als "Cross" bezeichnet wird. Das Vektorfeld wird in dieser Form beschrieben:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Das Vektorfeld ist so aufgebaut, dass der Wind von der linken oberen und der rechten unteren Ecke in die linke untere und rechte obere Ecke strömt. Dabei wird der Punkt $[0, 0]$ umströmt.

Die Abbildung 2.5(b) beschreibt das Vektorfeld "Rotation". Es ist ein zirkuläres Vektorfeld, welches die Rotation um den Ursprung darstellt. Die mathematische Beschreibung ist wie

2 Grundlagen

folgt festgelegt:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

In Abbildung 2.5(c) wird das Vektorfeld mit dem Namen "Sheared" gezeigt. Hier verläuft die Strömung von Innen in einer um den Uhrzeigersinn rotierenden Bewegung nach Außen, je weiter diese Vektoren vom Ursprung entfernt sind. Die Beschreibung des Vektorfeldes ist festgelegt mit:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Das Vektorfeld mit dem Namen "Wave" wird in Abbildung 2.5(d) dargestellt. Es besteht aus den trigonometrischen Komponenten Sinus und Kosinus und der Wind verläuft hier von oben nach unten in einer wellenartigen Bewegung. Das Vektorfeld sieht wie folgt aus:

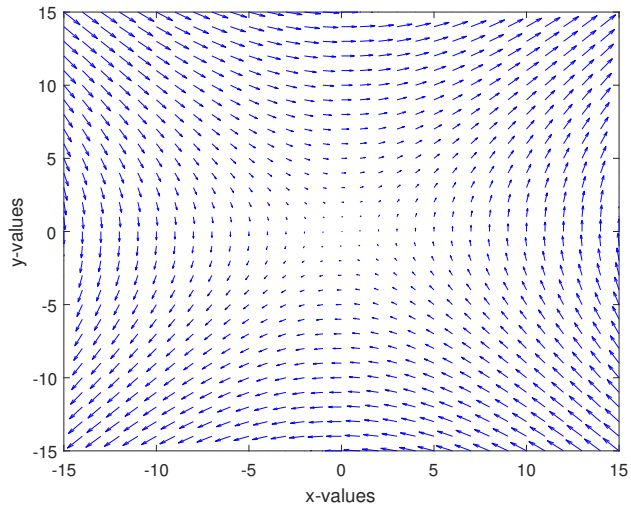
$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(x * (y - x)) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Abbildung 2.5(e) ist ein Vektorfeld, welches einem Tornado ähnelt und wird auch als "Tornado" bezeichnet. Die Strömung verläuft in einer rotierenden Bewegung von Außen nach Innen. Die mathematische Beschreibung sieht wie folgt aus:

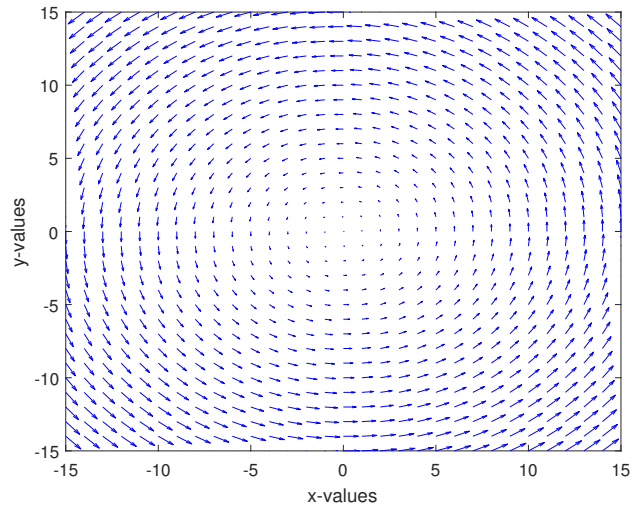
$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -x - y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Diese vorgestellten Vektorfelder werden für den Algorithmus, der in dieser Arbeit beschrieben wird, genutzt. Die unterschiedlichen Vektorfelder dienen hierbei als Störfelder und beeinflussen den optimierenden Algorithmus. Dabei soll untersucht werden, ob unterschiedliche Vektorfelder positive oder negative Auswirkungen auf das Optimierungsverfahren haben. Die Beobachtungen werden in Unterabschnitt 5.2.4 beschrieben.

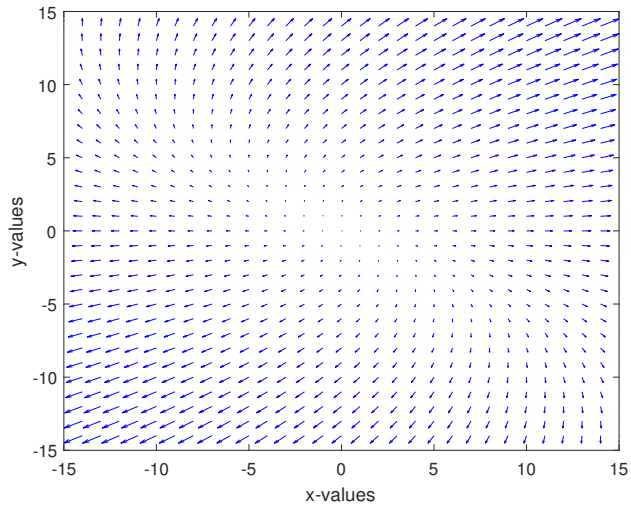
2 Grundlagen



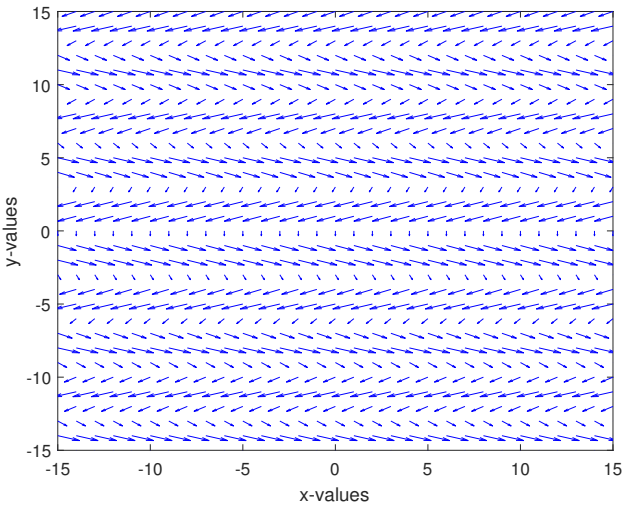
(a) Vektorfeld "Cross"



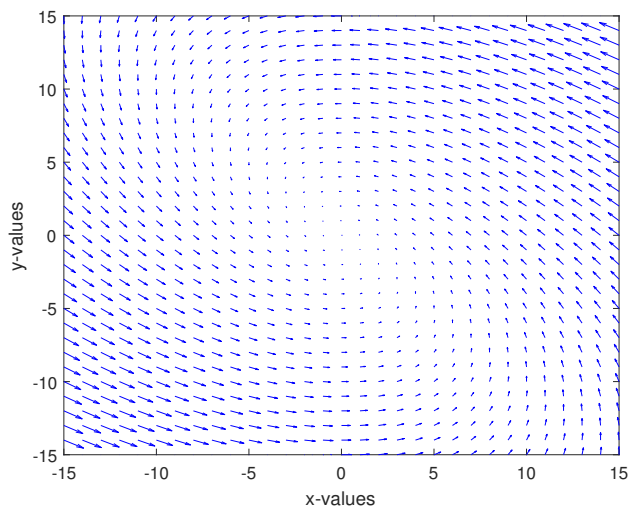
(b) Vektorfeld "Rotation"



(c) Vektorfeld "Sheared"



(d) Vektorfeld "Wave"



(e) Vektorfeld "Tornado"

Abbildung 2.5: Beispiele für Vektorfelder

2.3 Interpolation

Die Vektorfelder, welche in der Simulation verwendet werden, sind auf einem diskreten und festgelegten Definitionsbereich definiert. Für die Verwendung von festen Vektordaten auf einem regulären Gitter mit gleichem Abstand, kann durch Interpolation der umliegenden Punkte, ein kontinuierliches Vektorfeld in einer bestimmten Region im definierten Gitter berechnet werden. In Abbildung 2.6 wird die bilineare Interpolation in einer quadratischen Gitterzelle mit vier Gitterpunkten dargestellt. Der in dieser Arbeit entwickelte Algorithmus wird in Kapitel 3 im Detail beschrieben. Die Interpolation ist für den Algorithmus wichtig, als dass dieser in einem unbekanntem Suchraum optimiert. Der Algorithmus nutzt explorierende Partikel, die zu jeder Iteration die Informationen der Umgebung in einer Informationsmatrix **VMap** abspeichern. Die gesammelten Informationen bestehen aus Korrekturvektoren, die die Abweichung durch das Vektorfeld korrigieren. Die erhaltenen Informationen sind in Abhängigkeit der durchlaufenen Iterationen unvollständig und werden Schritt für Schritt gesammelt. Um aus den unvollständigen Informationen Vektoren zu jeder Position berechnen zu können wird die Interpolation benötigt.

Die in dieser Arbeit genutzte bilineare Interpolation ist eine Interpolation in zwei Rich-

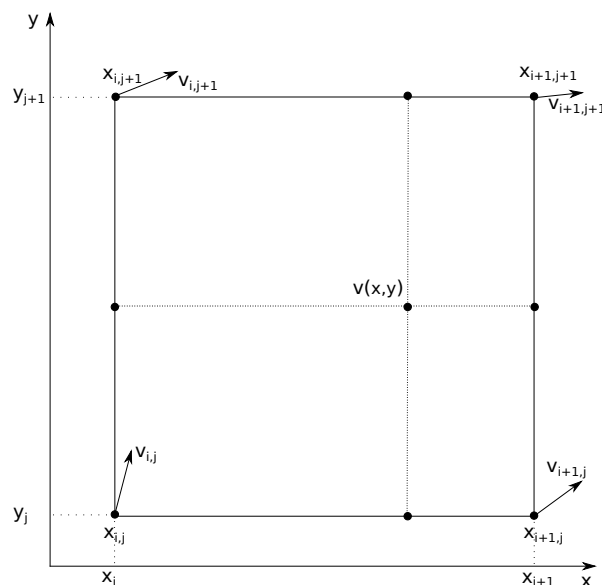


Abbildung 2.6: Bilineare Interpolation eines Vektorfeldes

tungen. Sie wird entweder in x -Richtung und dann in y -Richtung oder erst in y - und dann in x -Richtung durchgeführt. Die Berechnung eines beliebigen Vektors innerhalb einer

2 Grundlagen

Zelle aus vier benachbarten Gitterpunkten im Einheitsabstand von eins kann wie folgt mathematisch beschrieben werden [Bus03, Poz01, The16]:

Zunächst die Interpolation in die x-Richtung der unteren zwei Punkte und oberen zwei Punkte:

$$\vec{v}_{x,0} = (1 - t) * \vec{v}_{i,j} + t * \vec{v}_{i+1,j} \quad (2.16)$$

$$\vec{v}_{x,1} = (1 - t) * \vec{v}_{i,j+1} + t * \vec{v}_{i+1,j+1} \quad (2.17)$$

Und im Anschluss die Interpolation in y-Richtung, wobei die Ergebnisse aus Gleichung 2.16 und Gleichung 2.17 genutzt werden:

$$\vec{v}_{x,y} = (1 - t) * \vec{v}_{x,0} + t * \vec{v}_{x,1}, t \in [0, 1] \quad (2.18)$$

2.4 Stand der Forschung

Das Arbeitsfeld der Schwarmintelligenz ist breit gefächert [KE01]. Ein Bestandteil des Arbeitsfeldes ist die Lösung von Problemen durch das Partikelschwarmoptimierungsverfahren [EK95, Cle06b]. Da es kein optimales Verfahren gibt, hat auch dieser Algorithmus Einschränkungen. So können die Partikel bei der Optimierung zu nicht optimalen Lösungen ermitteln, wenn sich der Schwarm in lokale Minima positioniert hat und zum anderen konvergiert das Verfahren nur langsam. Des Weiteren spielt die Wahl der Parameter beim *PSO*-Verfahren eine entscheidende Rolle für die Optimierung. Die Gewichtungen des sozialen und kognitiven Terms ϕ , wie im vorherigen Abschnitt vorgestellt, sind nicht festgelegt und müssen zunächst gesetzt werden. Diese Einstellungen dieser Parameter haben Einfluss auf das optimierende Verfahren [SSA13]. Dadurch sind in der Forschung viele verbesserte Varianten entstanden, die diese Probleme lösen können, durch zum Beispiel zeitabhängige Veränderungen von Termen der Bewegungsgleichung vom *PSO*-Verfahren. In der Variante *HPSO-TVAC* (Hierarchical Particle Swarm Optimization With Time-varying Acceleration Coefficients) werden die Beschleunigungskoeffizienten

2 Grundlagen

der Bewegungsgleichung vom PSO-Verfahren zeitabhängig verändert. Dadurch soll am Anfang der Optimierung die Streuung der Partikel gesteuert werden und am Ende der Optimierung die Konvergenz des Schwarmes im Optimum begünstigen [AR04]. Weitere Varianten des PSO-Verfahrens nutzen Störfaktoren, die die Lösungen der Optimierung beeinflussen. Ein Beispiel hierfür ist die Forschungsarbeit [FZ11], die das Verfahren DDP-SO(Declined Disturbance Index PSO) vorstellt. Wenn die Geschwindigkeit der Partikel bei der Optimierung sich nicht mehr verändert, wird ein Störfaktor genutzt um die Partikel von ihrer Position zu verschieben. Die Ergebnisse zeigen, dass dadurch die Konvergenz des Algorithmus verbessert wird und der Störfaktor dabei hilft lokale Minima zu verhindern. In der Arbeit [WJ09] wird die Lokalisierung von Geruchsquellen in einer dynamischen Umgebung umgesetzt durch eine modifizierte Partikelschwarmoptimierung. Die Geruchsquellen repräsentieren chemische Stoffe, die durch einen Windfluss in den Suchraum transportiert werden. Des Weiteren wird das PSO-Verfahren in einem fest definierten Suchraum angewendet. Dabei können Partikel, durch zu hohe Geschwindigkeiten, den Suchraum verlassen. Diese Partikel müssen bei der Optimierung behandelt werden. Eine adaptive Anpassung der Geschwindigkeiten der Partikel, kann beim Erfolg des Verfahrens entscheidend sein [SH09]. In der Praxis werden häufig multikriterielle Optimierungen durchgeführt, dies bedeutet, dass ein Problem mit mehreren Zielen optimiert wird. Für die Optimierung solcher Probleme werden auch mehrere Schwärme genutzt, die zusammen arbeiten. In der Arbeit [BB04] wird gezeigt, dass für mehrdimensionale Probleme und einer sich veränderten Umgebung die Lösungen eines Multischwarmes übertreffen die Lösungen eines einfachen Schwarmes. Die Forschungsarbeit [PH11] beschreibt die Aufteilung des Schwarmes in kleineren Schwärmen sowie die Aufteilung eines multikriteriellen Problems in Subproblemen. Jedem dieser Subschwärme wird ein Subproblem zugeteilt. Im Bereich der Robotik ist die Erkundung von unbekanntem Umgebungen ein schwieriges Arbeitsfeld, zum Beispiel bei der Nutzung von mobilen Robotern in Katastrophengebieten. Suchstrategien und Beschreibungen der Umgebungen müssen definiert werden, um kollisionsfreie Bewegung oder Pfadplanung von mobilen Robotern zu ermöglichen [Li16, Zha13, Gon11].

3 Schwarmoptimierung in unbekanntem Vektorfeldern

In diesem Kapitel werden die umgesetzten Ideen des Algorithmus vorgestellt und erklärt. Die Grundidee besteht darin, dass die Partikelschwarmoptimierung in einem Vektorfeld stattfindet. Dabei haben die Optimierungspartikel keine Information über den Störfaktor. Der Störfaktor wird durch einfache, statische zweidimensionale Vektorfelder, wie in Abschnitt 2.2 erläutert, repräsentiert. Das heißt, dass die Optimierung einer gegebenen Zielfunktion in einer unbekanntem Umgebung gelöst werden muss.

Zunächst werden in Abschnitt 3.1 Beschränkungen festgelegt, um dieses komplexe Problem zu vereinfachen. Weiter im Abschnitt 3.2 wird der Suchraum definiert. Der Ansatz des Algorithmus dieser Arbeit besteht aus der Erzeugung zweier Schwärme. Forschungsarbeiten, die mehrere Schwärme nutzen, um ein Problem zu lösen, bezeichnen mehrere Schwärme als einen Multischwarm. Der in dieser Arbeit entwickelte Algorithmus wird als *EPSO* bezeichnet. Das E steht für "Explorative"-*PSO* und bezeichnet die zusätzliche Erkundung des Suchraumes. Folgende Strategie wird bei diesem Verfahren verfolgt: Ein Schwarm aus Individuen besteht aus explorierenden Partikeln, wie im Abschnitt 3.3 detailliert dargestellt. Ein weiterer Schwarm mit Individuen, welcher aus optimierenden Partikeln besteht, wird in Abschnitt 3.4 genauer behandelt. Beide Schwärme kommunizieren und tauschen Informationen über die gesammelte Umgebung aus, während der optimierende Schwarm diese Informationen nutzt, um die Position der Partikel zu korrigieren. Im Abschnitt 3.5 wird die Funktion des Algorithmus *VPSO*, welcher zum Vergleich dient, beschrieben und erklärt. Das V steht für "Velocity".

3.1 Einschränkungen

Die Einschränkungen, die für die Entwicklung des Algorithmus notwendig waren, werden in diesem Abschnitt erläutert. Zunächst findet die Optimierung des neu entwickelten *PSO*-Verfahrens, im Folgenden auch als *EPSO* bezeichnet, nur im zweidimensionalen Raum statt. Dadurch wird die Komplexität des Problems deutlich vermindert. Weitere Maßnahmen werden bei den explorierenden Partikeln festgelegt. Diese Partikel haben keine Trägheit und keine weiteren Aufgaben, als dem Störfaktor zu folgen. Die Geschwindigkeit der explorierenden Partikel ist normalisiert, sodass ihre Bewegung begrenzt ist, um den Suchraum möglichst vollständig zu untersuchen.

3.2 Beschreibung des Suchraumes

Der Suchraum ist in einem Definitionsbereich in x -Richtung und y -Richtung im Bereich von $[-15, 15]$ definiert. Der diskretisierte Suchraum wird als Gitter beschrieben mit einem Gitterabstand von eins.

3.3 Explorierende Partikel

Die Aufgabe des explorierenden Schwarms ist es, Informationen über den Störfaktor, also den Wind, zu sammeln. Dieser Schwarm arbeitet mit dem im nächsten Abschnitt im Detail beschriebenen *EPSO*-Verfahren. Die Individuen des Schwarms haben keine komplexen Regeln, die sie befolgen müssen. Sie werden am Start auf eine zufällige Position im Suchraum gesetzt und folgen dem Windfluss. Wie im Abschnitt 3.1 erklärt wurde, bewegen sich die Partikel normalisiert. Dadurch wird ermöglicht, dass die Partikel in ihrer Bewegung keine Lücken aufweisen. Die Bewegungsinformationen über den Schwarm werden in zwei Matrizen festgehalten. Beide Matrizen bilden eine Matrix aus Vektoren. In der einen Matrix wird die x -Komponente und in der anderen die y -Komponente der Bewegung gespeichert. Diese Matrizen werden weiter als **VMap** gekennzeichnet und repräsentieren die gesammelten Informationen. Bei der Speicherung der Bewegung in der **VMap** wird der normalisierte Wert zurücktransformiert, um die echten Informationswerte zu erhalten. Jeder dieser Informationswerte in der **VMap** Matrix entspricht einem Gitterpunkt des

3 Schwarmoptimierung in unbekanntem Vektorfeldern

definierten Suchraumes. Dadurch, dass der Suchraum diskret ist, können Informationen innerhalb einer Gitterzelle durch Interpolation der Gitterpunkte berechnet werden, so wie im Abschnitt 2.3 beschrieben. Dies ist notwendig, da in jeder Iteration mehr Informationen gesammelt werden und die **VMap** nicht vollständig ist und Lücken beinhaltet. Die gesammelten Informationen werden mit dem optimierenden Schwarm ausgetauscht. Im Folgenden wird der Algorithmus 5 hierfür dargestellt.

Algorithmus 5 Explorierende Partikel

```
for Für jedes Partikel do
  Initialisiere Anfangsposition
end for
for Anzahl der Iterationen do
  for Anzahl der Partikel  $i$  do
    Berechnung des Windes aus dem Vektorfeld  $\vec{v}_i(t+1) = \vec{v}_{\text{field}}(\vec{x}_i(t))$ 
    Berechne neue Position  $\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t+1)$ 
    Speicherung der Geschwindigkeit in der Informationsmatrix VMap
  end for
  Sende VMap an EPSO 6
end for
```

3.4 Explorative-Partikelschwarmoptimierung (EPSO)

Die Bezeichnung *EPSO* steht für die explorative Partikelschwarmoptimierung. Die Aufgabe des zweiten Schwarmes ist die Optimierung der gegebenen Zielfunktion. Beispiele für die Zielfunktion können bekannte Testfunktionen sein, wie die sphärische Funktion, die "Rosenbrock-Funktion" und die "Ackley-Funktion". Die Berechnung des *EPSO*-Verfahrens unterscheidet sich vom *PSO*-Verfahren insofern, als dass das Vektorfeld einen Einfluss auf alle Partikel des Schwarmes hat. Die Optimierung erfolgt mit einem ausgewählten Vektorfeld aus Abschnitt 2.2. Die Partikel werden während der Optimierung an ihrer Position durch einen Windvektor gestört. Außerdem wird ein Korrekturwert α berechnet, um die Position der Partikel zu korrigieren. Dabei wird in jeder Iteration die Informationsmatrix **VMap** aus dem Algorithmus der explorierenden Partikel zum *EPSO*-Verfahren gesendet. Der *EPSO*-Algorithmus wurde umgesetzt durch die Parallelisierung beider Schwärme. Diese Parallelisierung der Aufgaben wird in Abschnitt 4.4 behandelt. Der Algorithmus des *EPSO*-Verfahrens⁶ sieht wie folgt aus:

Algorithmus 6 EPSO - mit Korrektur und Windeinfluss

```

for Für jedes Individuum do
  Initialisiere Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit
end for
for Anzahl der Iterationen do
  Empfange Matrix VMap aus Algorithmus 5
  for Anzahl der Partikel do
    // Berechne  $\alpha$ 
     $\alpha(\vec{x}_i(t)) =$  Interpolation der Nachbarpunkte in VMap
    // Geschwindigkeit aktualisieren
     $\vec{v}_i(t+1) = \omega\vec{v}_i(t) + \phi_1(p_i - \vec{x}_i(t)) + \phi_2(\vec{p}_g - \vec{x}_i(t)) + \vec{v}_{\text{field}}(\vec{x}_i(t)) - \alpha(\vec{x}_i(t))$ 
    // Berechne neue Position
     $\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t+1)$ 
  end for
end for

```

Jeder Vektor in der Informationsmatrix **VMap** repräsentiert einen Korrekturwert einer gegebenen Position für die Partikelgeschwindigkeit im *EPSO*-Verfahren. Dieser Wert wird als α im Algorithmus bezeichnet. Um die Geschwindigkeit des Korrekturwertes zu erhalten werden die umliegenden vier Nachbarpunkte von der Position des Partikels genommen und in der Informationsmatrix **VMap** interpoliert. Die Interpolation wurde im Abschnitt 2.3 im Detail vorgestellt. Wenn keine Informationen enthalten sind, funktioniert der Algorithmus weiter wie der normale *PSO*-Algorithmus nur mit der Berücksichtigung des Windes, da der Korrekturwert 0 wäre.

3.5 Einführung des *VPSO*-Verfahrens

Der Algorithmus 7 *VPSO* ist ein modifizierter *PSO*-Algorithmus. Das V steht für "velocity", also die Geschwindigkeit und soll die Berücksichtigung des Störfeldes andeuten. Die Unterscheidung zum *PSO*-Verfahren liegt darin, dass bei der Berechnung der neuen Geschwindigkeit für die jeweiligen Partikel der Windvektor vom Vektorfeld an der Position des Partikels hinzuaddiert wird. Damit wird das Vektorfeld berücksichtigt, aber keine weiteren Maßnahmen ergriffen, um den Algorithmus zu verbessern. Dadurch ist es möglich, einen Vergleich zum vorherigen vorgestellten *EPSO*-Verfahren zu erhalten und zu sehen, wie der *PSO*-Algorithmus in einem Umfeld mit Störfaktoren arbeitet. Dadurch wird natürlich der *VPSO*-Algorithmus am schlechtesten optimieren können, da

3 Schwarmoptimierung in unbekanntem Vektorfeldern

die richtige Optimierung gestört wird. Dennoch können Informationen über das Störfeld gesammelt werden, wenn zum Beispiel das Vektorfeld positive Auswirkungen auf die Optimierung hat.

Algorithmus 7 VPSO - Berücksichtigung des Vektorfeldes

for Für jedes Partikel **do**

 Initialisiere Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit

end for

for Anzahl der Iterationen **do**

for Anzahl der Partikel **do**

 // Geschwindigkeit aktualisieren

$$\vec{v}_i(t+1) = \omega \vec{v}_i(t) + \phi_1(\vec{p}_i - \vec{x}_i(t)) + \phi_2(\vec{p}_g - \vec{x}_i(t)) + \vec{v}_{\text{field}}(\vec{x}_i(t))$$

 // Berechne neue Position

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t+1)$$

end for

end for

4 Implementierung der Simulation

In diesem Kapitel werden die implementierten Programme dargestellt und die einzelnen Merkmale und Funktionen beschrieben und erläutert. Es wurde ein grafisches Userinterface erstellt, um den entwickelten Algorithmus bei der Optimierung zu visualisieren. Außerdem wird die Optimierung durch Diagramme unterstützt, die die Arbeitsweise des Algorithmus darstellen. Die Diagramme und ihre unterstützende Funktion bei der Visualisierung werden ebenfalls in den folgenden Abschnitten erklärt. Die gleichzeitige Darstellung der drei Algorithmen wird durch die Parallelisierung der Verfahren ermöglicht. Die genaue Entwicklung wird in Abschnitt 4.4 beschrieben.

Als weiteres Programm wurde eine statistische Implementierung umgesetzt, die minimiert wurde, sodass Bilder nicht mehr gerendert werden müssen. Des Weiteren wurde die Berechnung mehrerer Parameter automatisiert. Dadurch konnten sehr viele Parameter des EPSO-Algorithmus getestet werden. In der grafischen Implementierung und der statistischen Implementierungen werden die Algorithmen *PSO*, *EPSO* und *VPSO* berechnet und verglichen, die im Kapitel 3 vorgestellt wurden.

4.1 Programm

Für die Implementierung wurde die proprietäre Software MATLAB 2016a benutzt. Die Vorteile dieser Software sind die optimierten Funktionen für die Vektor- und Matrizenberechnungen, die bei der Partikelschwarmoptimierung genutzt werden [Mat17a]. Außerdem kann die Software durch vom Hersteller bereitgestellte Toolboxes erweitert und für spezifische Probleme individualisiert werden. Folgende Toolboxes wurden für die Implementierung verwendet [Mat17b]:

- Die statistische Toolbox "Statistics and Machine Learning Toolbox"

4 Implementierung der Simulation

- Die Toolbox für die Parallelisierung von Prozessen "Parallel Computing Toolbox"

Weiter gibt es eine große Gemeinschaft für MATLAB, sodass viele Hilfen im Internet vorhanden sind und erweiterte Funktionen durch Mitglieder bereitgestellt werden können. Die Funktion `export_fig`, welche die Exportierung von zurechtgeschnittenen Vektorgrafiken erlaubt, wurde in der Implementierung der Simulation verwendet [Alt09].

4.2 Grafisches Userinterface

4.2.1 Aufbau der Benutzeroberfläche

In Abbildung 4.1 ist die grafische Bedienoberfläche dargestellt. Dort ist eine Momentaufnahme des ausgeführten Programms zu sehen. Auf der linken Seite, in einem isolierten Bereich der Visualisierung, befinden sich mögliche Parametereinstellungen für die drei Algorithmen *PSO*, *EPSO* und *VPSO*. Diese werden im Unterabschnitt 4.2.8 beschrieben und erläutert. In der Mitte des Programms befinden sich drei Diagramme mit unterschiedlichen Funktionen und Merkmalen. Das oberste Diagramm ist die Kombination des Funktionsminima-Plots und des Bewusstseinsplots, welche im Unterabschnitt 4.2.2 und Unterabschnitt 4.2.3 detailliert beschrieben werden und deren Funktion erklärt wird. Darunter folgt die Konvergenzrate der zu vergleichenden Algorithmen, die im Unterabschnitt 4.2.4 erklärt wird. Im Unterabschnitt 4.2.5 wird das Erkundungsdiagramm der explorierenden Partikel des *EPSO*-Verfahrens dargestellt. Auf der rechten Seite des Programms sind zwei größere Visualisierungen zu sehen. Das obere Diagramm ist die Visualisierung des *EPSO*-Algorithmus und wird im Unterabschnitt 4.2.6 beschrieben. Das darunter folgende Diagramm stellt die drei Algorithmen im direkten Vergleich dar und wird im Unterabschnitt 4.2.7 beschrieben. Die grafische Bedienoberfläche kann genutzt werden, um interessante Parametereinstellungen zu finden. Diese können dann im Statistik-Programm genauer untersucht werden. Außerdem kann die Funktionsweise des *EPSO*-Algorithmus beobachtet werden. Die Visualisierung der Funktionsweise und die Unterstützung durch die Diagramme können ein direktes Feedback geben.

4 Implementierung der Simulation

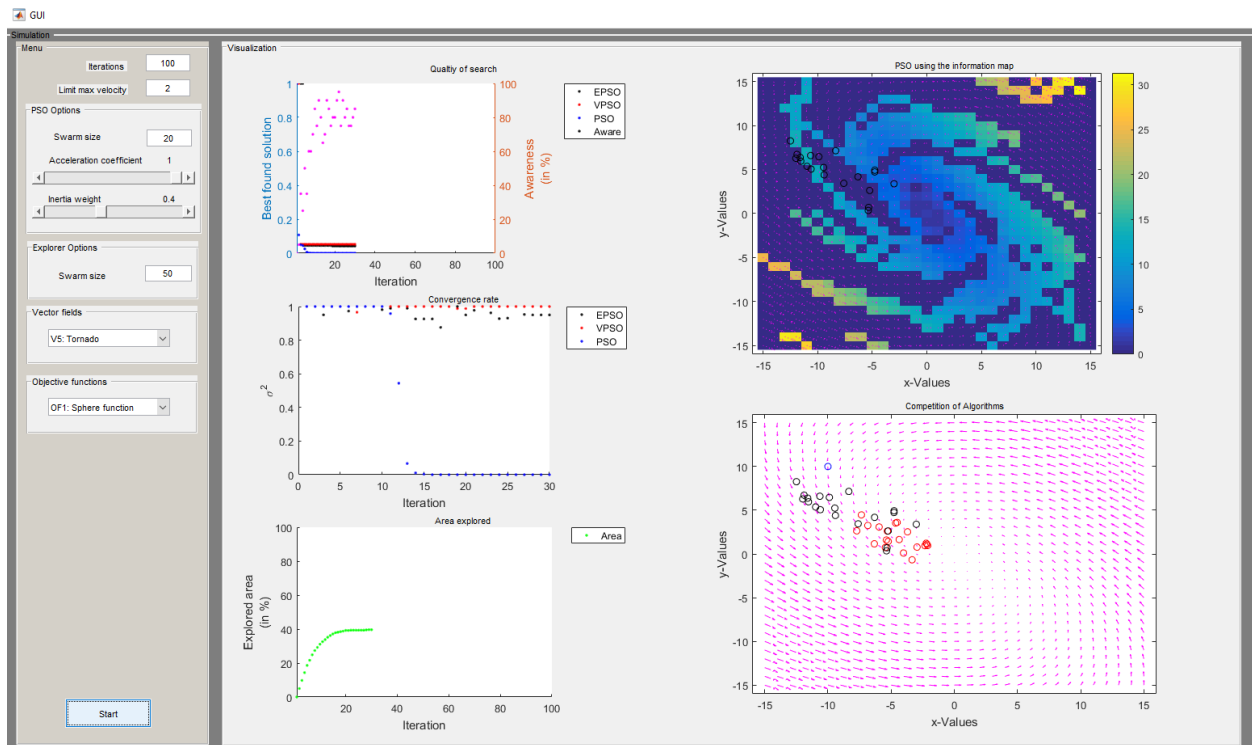


Abbildung 4.1: Aufbau der grafischen Oberfläche

4.2.2 Funktionsminima-Plot

Das Funktionsminima-Diagramm beinhaltet die Darstellung der besten Lösungen innerhalb einer Iteration der zu vergleichenden Algorithmen. Dadurch ist der Vergleich der Lösungen in jeder Iteration möglich. Dabei wird konkret nur auf die Iteration geachtet, nicht aber auf die benötigte Zeit für jede Iteration. Die Abbildung 4.2 stellt ein Funktionsminima-Diagramm im Detail dar. Dabei wird das *EPSO*-Verfahren in schwarz, das *PSO*-Verfahren in blau und das *VPSO*-Verfahren in rot gekennzeichnet. Die x-Achse repräsentiert die Iterationen und die linke y-Achse, beschreibt die beste gefundene Lösung zur gegebenen Iteration. Die rosa Line im Funktionsdiagramm stellt das Bewusstsein in der rechten y-Achse des *EPSO*-Algorithmus dar und wird im nächsten Unterabschnitt 4.2.3 erklärt.

4 Implementierung der Simulation

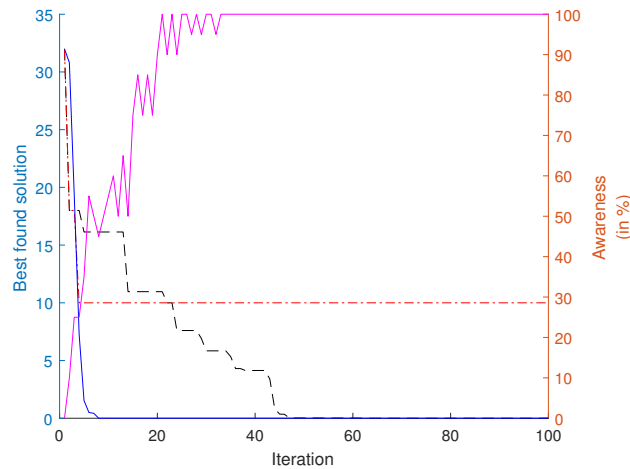


Abbildung 4.2: Funktionsminima-Diagramm in Kombination mit dem Bewusstseins-Plot

4.2.3 Bewusstseins-Plot

Das Bewusstseins-Diagramm, welches im vorherigen Abschnitt in Abbildung 4.2 als rosa Linie dargestellt wurde, beschreibt wie viele der Partikel des *EPSO*-Verfahrens eine Korrektur der Partikelgeschwindigkeit durchgeführt haben. Eine Korrektur kann nur berechnet werden, wenn die besuchte Position von explorierenden Partikeln erkundet wurde. Dabei wird geschaut, ob an dem Punkt in der jeweiligen Position die interpolierte Geschwindigkeit in der Informationsmatrix **VMap** nicht 0 war. Die Berechnung sieht wie folgt aus 8:

Der Wert α beschreibt den erfahrenen Korrekturwert des i -ten Partikels. $\#p_{\text{aware}}$ beschreibt

Algorithmus 8 Bewusstsein

```
for Anzahl der Iterationen do
  for Anzahl der Partikel do
    // Interpolation von  $\alpha$  in VMap
    if  $\alpha(\vec{x}_i(t)) \neq 0$  then
       $\#p_{\text{aware}} = \#p_{\text{aware}} + 1$ 
    end if
  end for
  // Berechnung des Bewusstseins vom Schwarm und Abspeicherung
   $\text{awareness}_{it} = \frac{\#p_{\text{aware}}}{N}$ 
end for
```

die Anzahl der Partikel, die einen Korrekturwert erhalten haben und N ist die Schwarmgröße. In jeder Iteration wird awareness_{it} berechnet, also das Bewusstsein des Schwarmes

4 Implementierung der Simulation

in der jeweiligen Iteration.

4.2.4 Konvergenzrate

Die Konvergenzrate beschreibt, die Konvergenz des Schwarms in einem bestimmten Punkt. Dieser Punkt ist ein lokales Minimum oder auch im optimalen Fall das globale Minimum der gegebenen Zielfunktion. Zunächst wird Schwarmkonvergenz wie folgt definiert [Sch15]:

Ein Schwarm S konvergiert, falls es fast sicher einen Punkt z gibt, bei dem die folgenden zwei Bedingungen gelten:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} v(t) = 0$
(die Geschwindigkeit geht gegen null),
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x_i(t) = z$
für jedes $i \in [1, \dots, N]$ (jedes Partikel bewegt sich in Richtung z).

Für die Berechnung der Konvergenz wird die Varianz der Fitness benötigt, die wie folgt berechnet wird:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_i - f_{\text{avg}}}{f} \right)^2. \quad (4.1)$$

Hierbei repräsentiert N die Größe des Schwarms der optimierenden Partikel, f_i beschreibt die Fitness des i -ten Partikels, f_{avg} die durchschnittliche Fitness des Schwarms einer Iteration und f ist ein Normalisierungsfaktor um σ^2 zu beschränken und ergibt sich aus folgender Berechnung:

$$f = \max \{1, \max \{|f_i - f_{\text{avg}}|\}\}, i \in [1, N]. \quad (4.2)$$

Die Varianz σ^2 beschreibt die Konvergenz aller Partikel des Schwarms. Je kleiner der Wert, desto besser ist die Konvergenz des Schwarms und dies bedeutet, dass alle Partikel sich zu einem festen Punkt z im Suchraum bewegen. Wie im zweiten Punkt der beschriebenen Definition der Schwarmkonvergenz [Tia13].

Wie in Abbildung 4.3 veranschaulicht, sind die Konvergenzraten der Algorithmen *EPSO* (schwarz), *PSO* (blau) und *VPSO* (rot) gekennzeichnet. Das *PSO*-Verfahren ist in der 19.

4 Implementierung der Simulation

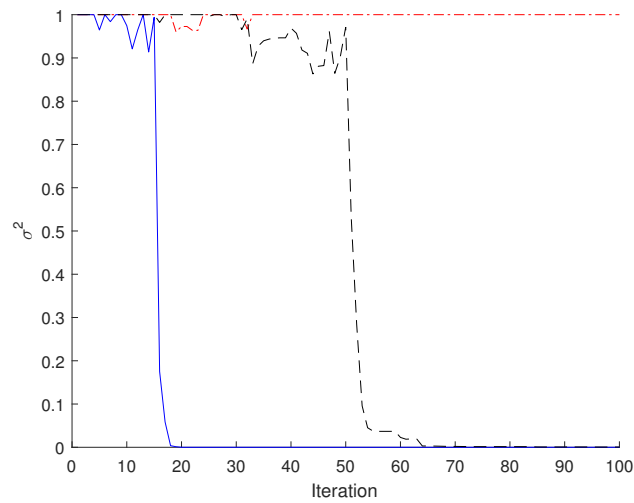


Abbildung 4.3: Konvergenzraten der untersuchten Algorithmen

Iteration konvergiert. Das *EPSO*-Verfahren konvergiert erst später, ca. in der 65. Iteration, während das *VPSO*-Verfahren gar nicht konvergiert.

4.2.5 Erkundungs-Plot

Das Erkundungs-Diagramm beschreibt, wie viel von der Umgebung schon erkundet worden ist. Dabei werden die gesammelten Informationen von den explorierenden Partikeln aus der Informationsmatrix **VMap** untersucht. Der Aufbau dieser Informationsmatrix wurde in Kapitel 3 beschrieben. Die x- und y-Komponenten sind in zwei unterschiedlichen Matrizen abgespeichert. Für die Berechnung des Erkundungsdiagramms wird eine neue Matrix konstruiert, die beide Matrizen in einer Matrix **VMap_{length}** vereinigt. Die Informationen, die nun in der Matrix **VMap_{length}** vorhanden sind, sind die Längen der gespeicherten Korrekturvektoren. Die Berechnung sieht wie folgt aus:

Algorithmus 9 $VMap_{length}$

```
for Anzahl der Matrixzeilen  $i$  do  
  for Anzahl der Matrixspalten  $j$  do  
     $VMap_{length} = \sqrt{VMap_x(i, j)^2 + VMap_y(i, j)^2}$   
  end for  
end for
```

Beide Matrizen haben dieselbe Größe. Für jeden Eintrag in den beiden Matrizen wird

4 Implementierung der Simulation

die euklidische Norm berechnet, da es sich hierbei um ein zweidimensionales Problem handelt, ist diese der Satz von Pythagoras und kann daher einfach berechnet werden.

Berechnung der euklidischen Norm für $n \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (4.3)$$

Die prozentual erkundete Umgebung wird in der folgenden Gleichung dargestellt. Dabei entspricht die Variable $\#k$ der Anzahl der Elemente in der Matrix $VMap_{vlength}$, die nicht null sind. Der Nenner $\#el$ entspricht der Anzahl aller Elemente in der Matrix $VMap_{vlength}$. Die Relation der beiden Werte entspricht der erkundeten Umgebung in der jeweiligen Iteration. Das Ergebnis wird mit 100 multipliziert, um prozentuale Werte zu erhalten.

$$explored_Area = \frac{\sum_{i=1}^{\#k} i}{\sum_{j=1}^{\#el} j} * 100. \quad (4.4)$$

In der grafischen Bedienoberfläche wird der prozentuale Erkundungswert in einem einfachen Graph, wie in Abbildung 4.4 dargestellt. Die prozentual erkundete Umgebung wird in Abhängigkeit der durchgeführten Iterationen dargestellt. Der Vorteil bei dieser Visualisierung des Erkundungswertes ist die wirkungsweise eines ausgewählten Vektorfeldes auf die Optimierung des *EPSO*-Verfahrens. Durch das Erkundungsdiagramm kann beobachtet werden, inwiefern ein Vektorfeld bei der Erkundung des unbekanntes Suchraumes hilfreich sein kann. Die Anzahl explorierender Partikel hat einen großen Einfluss auf die Suche. Eine große Anzahl der explorierender Partikel sammeln schneller und mehr Informationen in kürzerer Zeit. Das heißt, dass weniger Iterationen benötigt werden. Um das Problem und die Komplexität jedoch realistisch zu halten, sind kleinere Erkundungsschwärme von Interesse. In Unterabschnitt 5.2.4 werden die Auswirkungen und Einflüsse der genutzten Vektorfelder auf den explorierenden Schwarm beschrieben.

4 Implementierung der Simulation

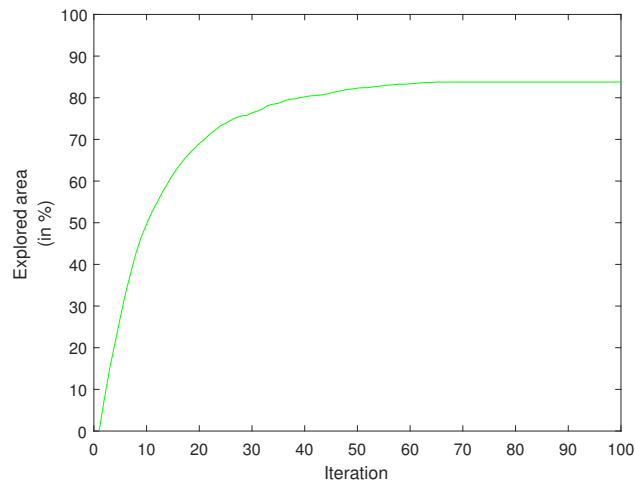


Abbildung 4.4: Beispiel einer Erkundungskurve

4.2.6 Visualisierung der Optimierung des EPSO-Verfahrens

In Abbildung 4.5 wird der arbeitende *EPSO*-Algorithmus in der grafischen Oberfläche visualisiert. Der Algorithmus optimiert in einem definierten Bereich von $x, y \in [-15, 15]$. In der Darstellung wird die Matrix $\mathbf{VMap}_{vlength}$ mit einem Farbverlauf von lila zu gelb abgebildet. So wie im Unterabschnitt 4.2.5 die Berechnung der $\mathbf{VMap}_{vlength}$ erklärt wurde, zeigt die farbige Darstellung die Länge der Korrekturvektoren aus der Informationsmatrix. Eine dunkle Farbe bedeutet, dass kein Vektor oder nur ein sehr niedriger Wert vorhanden ist. Je heller die Farbe, desto stärker ist der Windvektor der Informationsmatrix. Eine nicht-lila Darstellung bedeutet, dass diese Region von einem explorierenden Partikel erkundet wurde und der Korrekturwert für diese Position vorhanden ist. Die farbige Darstellung wird durch das vom Benutzer ausgewählte Vektorfeld überlagert. Die Längen der rosa Pfeile entsprechen der Stärke des Windes und zeigen wie das Vektorfeld aufgebaut ist. In diesem Fall ist es ein zirkuläres, statisches Vektorfeld. Die Windvektoren umkreisen den Ursprung $[0, 0]$. Im oberen linken Bereich in schwarz gekennzeichnet ist der optimierende Schwarm des *EPSO*-Algorithmus. Jede einzelne Scheibe repräsentiert hierbei ein optimierendes Partikel des Optimierungsverfahrens. Die Abbildung 4.4 entspricht hierbei der Erkundungskurve für die ausgeführte Simulation. Ein großer Bereich wurde erkundet, sodass in der Enditeration die Umgebung zu ca. 85 Prozent erkundet worden ist. Dadurch kann der Algorithmus häufig Korrekturen durchführen und konvergiert fast im Minimum an der Stelle $[-10, 10]$.

4 Implementierung der Simulation

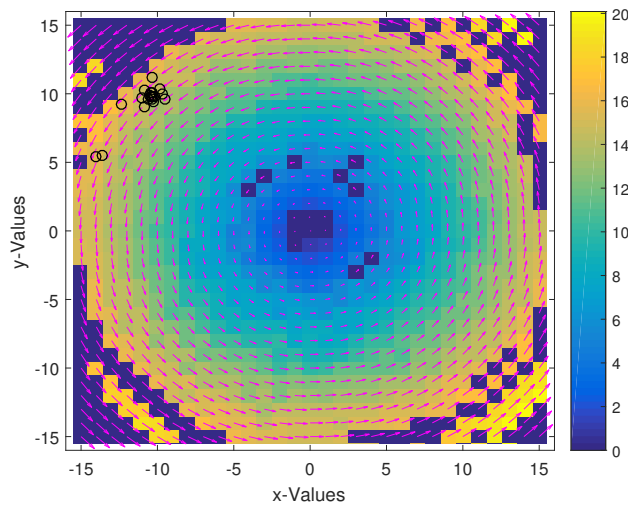


Abbildung 4.5: Veranschaulichung des EPSO-Verfahrens

4.2.7 Vergleich der Algorithmen

Die letzte Darstellung in der grafischen Bedienoberfläche ist die Veranschaulichung der zu vergleichenden Algorithmen. In Abbildung 4.6 werden gleichzeitig die drei Algorithmen *PSO*, *EPSO* und *VPSO* dargestellt. Die Farben Blau, Schwarz und Rot werden den Algorithmen *PSO*, *EPSO* und *VPSO* zugeordnet. Diese Visualisierung ermöglicht den Vergleich der Funktionsweise der untersuchten Algorithmen. Die Schwarmkonvergenz der Algorithmen ist zu beobachten, aber auch wie gut die Optimierungsverfahren arbeiten. Die Grafik ermöglicht es, einen Überblick der drei Algorithmen zu erhalten. Die Position des globalen Minimums ist der Punkt $[-10, 10]$. Für dieses Beispiel wurde eine sphärische Testfunktion genutzt und 100 Iterationen durchgeführt. In der Darstellung ist zu sehen, dass der *VPSO*-Algorithmus sehr verstreut ist und sich weit vom Optimum befindet. Der gegebene *VPSO* Schwarm kann nicht im Minimum konvergieren, da er permanent durch das Vektorfeld gestört wird. Das *EPSO*-Verfahren konvergiert fast im Minimum, jedoch befinden sich einige Partikel abseits des Optimums. Währenddessen ist der *PSO*-Algorithmus innerhalb der Iterationsvorgaben fast im Minimumpunkt konvergiert, ohne größere Abweichungen.

4 Implementierung der Simulation

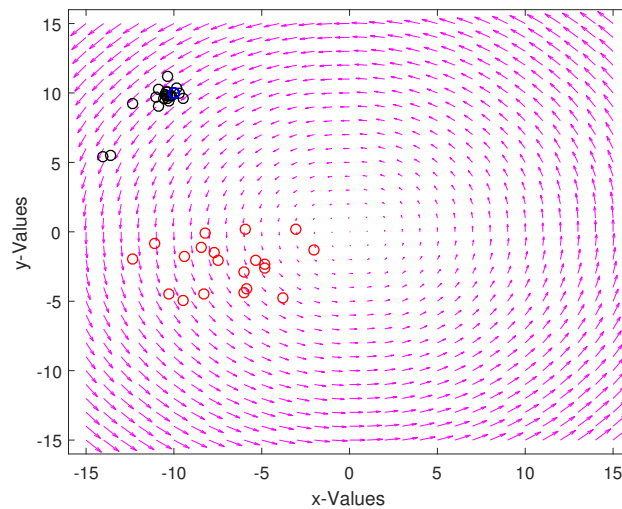


Abbildung 4.6: Vergleich der Algorithmen bei der Optimierung

4.2.8 Einstellbare Parameter

Für die Visualisierung der Algorithmen stehen unterschiedliche Parameter zur Verfügung. Die Liste gibt einen Überblick über die Parameter, welche im Folgenden erklärt werden.

- Iterationen: i
- Geschwindigkeitsbegrenzung: v_{max}
- Schwarmgröße: N_{opt}
- Beschleunigungskoeffizient: c
- Trägheitsfaktor: ω
- Explorierende Partikel: N_{expl}
- Vektorfelder: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5
- Testfunktionen: F_1, F_2, F_3

Iterationen

Der Parameter gibt die Anzahl der Iterationen an, die für alle drei Algorithmen zu Verfügung stehen, um das vorgegebene Problem zu optimieren.

4 Implementierung der Simulation

Geschwindigkeitsbegrenzung

Die Begrenzung der Geschwindigkeit ist ein Parameter, der die maximale Geschwindigkeit der Partikel in der Optimierung begrenzt. Einige Vektorfelder können zu hohen Partikelgeschwindigkeiten führen, sodass der *EPSO*- und *VPSO*-Algorithmus nicht in der Störumgebung funktionieren. Die Begründungen hierfür und weitere Details werden im Unterabschnitt 5.2.1 beschrieben.

Schwarmgröße

Für alle drei Algorithmen kann die Schwarmgröße der optimierenden Partikel ausgewählt werden. Die Initialisierung des Schwarmes ist für alle drei Verfahren dieselbe. Das heißt, das zur ersten Iterationen alle Individuen der Algorithmen an denselben Positionen starten, um einen Vergleich dieser Verfahren zu erhalten.

Beschleunigungskoeffizient

Der Beschleunigungsfaktor ist standardmäßig auf 1 gesetzt, jedoch sind Werte im Bereich $[0, 1]$ möglich.

Trägheitsfaktor

Auch hier sind Werte im Bereich $[0, 1]$ für den Trägheitsfaktor möglich. Für die Trägheit bedeutet die Auswahl von niedrigen Werten, dass die vorherige Geschwindigkeit nur einen geringen Einfluss beiträgt, wobei hohe Werte eine stärkere Gewichtung auf die vorherige Geschwindigkeit setzen.

Explorierende Partikel

Dieser Parameter ist ausschließlich für das *EPSO*-Verfahren. Die Größe gibt an, wie viele Partikel zur Verfügung stehen, um die Umgebung zu untersuchen. Je mehr Partikel gewählt werden, desto schneller können mehr Informationen in einem kürzeren Zeitraum gesammelt werden, dadurch steigt aber die Komplexität des Verfahrens.

Vektorfelder

Die Auswahl des Parameters legt das Störfeld fest, indem das *EPSO*- und *VPSO*-Verfahren optimieren. Die im Abschnitt 2.2 beschriebenen Vektorfelder stehen hierbei zur Auswahl.

Testfunktionen

Hier stehen insgesamt drei Testfunktionen zur Verfügung: eine sphärische Funktion, die

4 Implementierung der Simulation

"Rosenbrock-Funktion" und die "Ackley-Funktion". Diese Testfunktionen definieren das Problem, welches von den drei Algorithmen optimiert werden soll. Diese Funktionen und insbesondere deren Schwierigkeiten werden im Abschnitt 5.1 beschrieben.

4.3 Statistikprogramm

4.3.1 Funktionsweise

Für die Simulationsauswertung wurde ein Statistikprogramm entworfen. Es dient der Berechnung und Auswertung mehrerer Simulationen sowie der Automatisierung des Berechnungsverfahrens. Dadurch können unterschiedlichste Parameter getestet und überprüft werden. Die eingestellten Parameter werden standardmäßig in 100 Simulationen getestet und ausgewertet, um Ausreißer zu minimieren.

4.3.2 Erfolgsrate

Für die Berechnung der Erfolgsrate wird die Lösung des optimierenden Algorithmus betrachtet, welche als F bezeichnet wird. Außerdem wird das Minimum der Funktion als F^* beschrieben. Die Simulation wird als Erfolg bewertet, wenn folgende Bedingung erfüllt ist [YZL16]:

$$|F^* - F| < 1 * 10^{-2}. \quad (4.5)$$

Das bedeutet, dass eine fast optimale Lösung gefunden wurde, falls dieser Wert kleiner als 0,01 ist.

4.3.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung dient in dieser Arbeit der Analyse der erhaltenen Lösungen der Algorithmen. Sie beschreibt die Verteilung einer Zufallsvariable, in diesem Fall entspricht die Zufallsvariable die besten gefundenen Lösungen der ausgewerteten Simulationen. Die Standardabweichung wird wie folgt definiert [DSS12]:

4 Implementierung der Simulation

Eine Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n mit n Elementen sei gegeben. Der empirische Mittelwert oder auch Erwartungswert μ entspricht dem Mittelwert der Stichproben:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.6)$$

Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4.7)$$

4.3.4 Tabellenaufbau

Die durch das Statistikprogramm erzeugte Statistiktabelle wird in einem Excel-Dokument abgespeichert. In dieser Tabelle werden unterschiedliche Parameter berechnet und festgehalten. Im Folgenden wird eine aufgezeichnete Tabelle 4.1 für die Parameterwerte F_1 , V_2 , $N_{opt} = 20$, $N_{expl} = 80$ und $\omega = 0,6$ dargestellt:

Statistiktabelle								
Algorithm	Time s	Sucees %	Worst	Mean	Best	Std	Area %	Aware %
EPSO	0,0396	95	0,0309	0,0019	0	0,0041	79,09	91,92
PSO	0,0027	90	25,0648	0,3990	0	2,6661	-	-
VPSO	0,023	8	30,9383	5,7366	0	6,1628	-	-

Tabelle 4.1: Aufbau einer Statistiktabelle

In der Tabelle 4.1 werden für jeden Algorithmus die Zeit, die Erfolgsrate, die schlechteste gefundene Lösung, die durchschnittliche Lösung, die beste gefundene Lösung und die Standardabweichung berechnet. Die prozentual erkundete Umgebung sowie die Bewusstseinsrate wird nur für das *EPSO*-Verfahren ausgewertet. Für jede Auswertung werden 100 Simulationen durchgeführt. Die Zeit kann hierbei vernachlässigt werden. Die Erfolgsrate beschreibt die Robustheit und die Standardabweichung die Stabilität der Optimierungsverfahren.

4.4 Parallelisierung

In Abbildung 4.7 ist der vereinfachte Aufbau der Parallelisierung des *EPSO*-Algorithmus in MATLAB dargestellt. Die Abbildung besteht aus einem Client und zwei Worker-Prozessen, die mit dem Client kommunizieren. Die Aufgabe des Clients ist es, die Visualisierung der Daten aus den Algorithmen in einer GUI darzustellen. Für die Visualisierung und die Kommunikation zwischen Client und Worker wird ein spezielles Objekt aus MATLAB benötigt. Dieses heißt "Composite" und ist für den Transfer der errechneten Variablen, die ausgetauscht werden müssen, zuständig. Jedem Prozess wird eine andere Aufgabe zugeordnet. Der erste Prozess ist für die Erkundung des unbekannten Suchraumes zuständig, der Zweite für die Schwarmoptimierung. Der Client startet zunächst beide Prozesse, Worker 1 und Worker 2. Der Algorithmus *EPSO*, sendet in jeder Iteration mithilfe der Funktion "labsend()" aus der MATLAB Parallelisierungstoolbox die Informationsmatrix **VMap** an den zweiten Prozess. Der Worker 2 nutzt die Informationen aus dem Worker1, indem er die Funktion "labrecieve()" nutzt und kann so die Partikelgeschwindigkeit in der gegebenen Iteration korrigieren, falls Informationen vorhanden sind. Die Ergebnisse der jeweiligen Iteration werden durch das Composite()-Objekt zu dem Klienten transferiert und dargestellt. Des Weiteren wird nicht nur das *EPSO*-Verfahren parallelisiert, sondern auch alle Anderen. So laufen die Prozesse in vier Computerkernen gleichzeitig ab, wodurch die Visualisation der Arbeitsweise von den vorgestellten Algorithmen möglich ist. Außerdem ist bei der Berechnung mehrerer Simulationen die Zeitersparnis ein großer Vorteil, da so viele unterschiedliche Parametereinstellungen gleichzeitig für alle Verfahren getestet werden können.

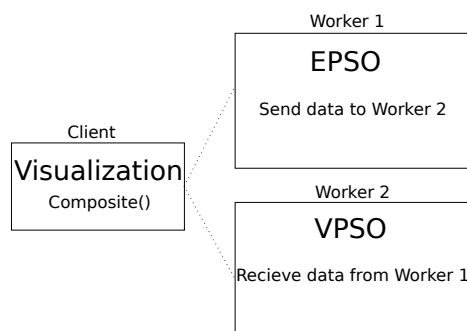


Abbildung 4.7: Funktionsweise der Parallelisierung

4.5 Fehler-Plot

Die Fehler-Plots werden aus einer Menge von Simulationen gebildet. In den Simulationsbeispielen wurden 100 Simulationen durchgeführt und ausgewertet. Für die Visualisierung der Diagramme müssen alle Simulationen einzeln ausgewertet und separat abgespeichert werden. Zunächst müssen die Standardabweichung sowie der Mittelwert der 100 Simulationen, also der Stichprobe, berechnet werden. Die Berechnung von beiden Parametern ist im Unterabschnitt 4.3.3 beschrieben. Eine Säule im Diagramm beschreibt den mittleren Fehler aller ausgewerteten Simulationen. Der Aufbau des Diagrammes ist hierbei der Selbe wie bei den Funktionsminima-Plots, nur in den Fehler-Plots werden alle 100 Simulationen dargestellt.

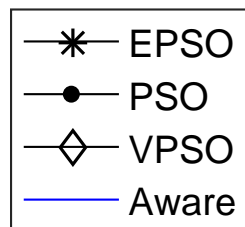


Abbildung 4.8: Legende eines Fehler-Plots

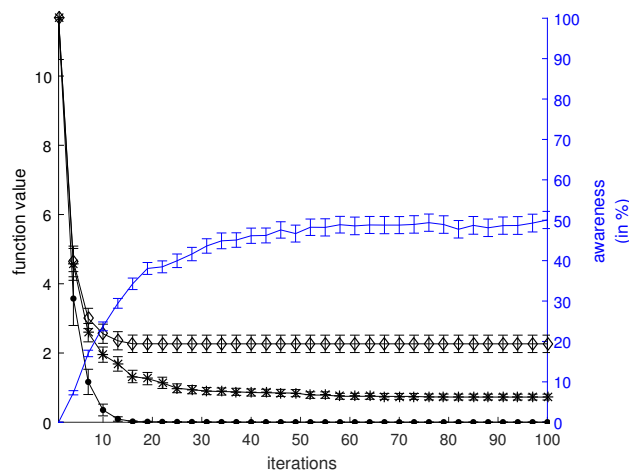


Abbildung 4.9: Abweichungen beim Testen von Paramter

In Abbildung 4.9 ist die Darstellung eines Fehler-Diagrammes zu sehen. Hier werden die drei Verfahren *PSO*, *EPSO* und *VPSO* gleichzeitig dargestellt, somit ist ein direkter Vergleich der Simulationsergebnisse möglich. Die Bewusstseinsrate ist nur für das

4 Implementierung der Simulation

EPSO-Verfahren relevant. In allen drei Iterationen wurde der mittlere Fehler der Simulationsauswertungen berechnet. Die sternförmigen Punkte repräsentieren hierbei die Auswertungen des *EPSO*-Verfahrens, die kreisförmigen repräsentieren das *PSO*-Verfahren und die rautenförmigen stellen das *VPSO*-Verfahren dar.

4.6 Visualisierung der Bewegungskurve

Zur Beobachtung der Schwarmbewegungen wurde die Bewegungsrichtung eines ausgewählten Partikels untersucht. Für jedes Verfahren wurde ein Partikel im Schwarm untersucht und die Bewegungsposition visualisiert. Dabei wurde in einer separaten Struktur die Position des Partikels zu jeder Iteration abgespeichert. Die Visualisierung ermöglicht es, die Auswirkung des Vektorfeldes auf die Schwarmbewegung zu untersuchen und inwiefern die Partikel gestört werden. Die Abbildung 4.10 beschreibt die Partikelbewegungen in unterschiedlichen Vektorfeldern von drei Partikeln, die jeweils einem Optimierungsverfahren *EPSO* (schwarz), *PSO* (blau) und *VPSO* (rot) angehören. Jede Abbildung repräsentiert die Bewegung der drei Partikel in einem der Vektorfelder, welche im Abschnitt 2.2 beschrieben werden. Hierbei ist das Minimum der Testfunktion im Punkt $[-10, 10]$. Folgende Parametereinstellungen wurden für die folgenden Abbildungen ausgewählt:

- $i = 100$
- $\omega = 0,6$
- $N_{opt} = 30$
- $c = 1$
- $N_{expl} = 20$
- Vektorfelder = $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$
- Testfunktion = F_1

In Abbildung 4.10(a) wird der Einfluss des Vektorfeldes "Cross" aus Abbildung 2.5(a) auf die Partikel der unterschiedlichen Optimierungsverfahren visualisiert. Das Partikel aus dem *PSO*-Verfahren macht keine Umwege und bewegt sich direkt zum Minimum. Das

4 Implementierung der Simulation

EPSO-Verfahren hat Schwierigkeiten das Minimum zu erreichen. Das liegt daran, dass die gesammelten Informationen aus den explorierenden Partikeln nicht ausreichen um den Störfaktor vollständig zu korrigieren, wobei sich das Partikel vom *EPSO*-Verfahren näher am Optimum befindet, als das Partikel vom *VPSO*-Verfahren, welches in der unteren Ecke im linken Bereich festgehalten wird.

In der Abbildung 4.10(b) ist das Vektorfeld "Rotation" aus Abbildung 2.5(b) als Störfaktor festgelegt. Dies ist ein zirkuläres Vektorfeld. Das *VPSO*-Partikel rotiert um den Punkt $[-5, 0]$ und erreicht nicht das Minimum. Die Bewegung des *EPSO*-Partikels befindet sich im nahen Umkreis des Minimums, jedoch macht es zunächst schnelle Bewegungen um das Minimum und nähert sich nur langsam an. Das *PSO*-Partikel findet direkt das Minimum. Die Abbildung 4.10(c) zeigt die Bewegung der Partikel mit dem Einfluss von Vektorfeld "Sheared" aus Abbildung 2.5(c). Die Partikel vom *EPSO*- und *VPSO*-Verfahren werden sehr stark durch die Winde beeinflusst und befinden sich dadurch im oberen rechten Bereich des Suchraumes und somit weit vom Minimum entfernt. Das *PSO*-Partikel bewegt sich ohne Störungen problemlos zum Minimum.

In der Abbildung 4.10(d) wird das Vektorfeld "Wave" genutzt aus Abbildung 2.5(d). In diesem Beispiel weisen die Winde nur eine geringe Stärke auf. Alle drei Partikel können mit wenigen Abweichung das Minimum erreichen.

Die letzte Abbildung 4.10(e) nutzt das Vektorfeld "Tornado" aus der Abbildung 2.5(e). Während das *PSO*-Partikel ohne Störungen das Minimum erreicht, hat das *EPSO*-Partikel in den ersten Iterationen Schwierigkeiten das Minimum zu finden. Gegen Ende der Simulation erreicht das Partikel das Minimum. Das *VPSO*-Partikel kann durch den Störfaktor nicht das Minimum erreichen.

Die Bewegungen der Partikel in den unterschiedlichen Vektorfeldern zeigen deutlich den Einfluss der Vektorfelder auf das Optimierungsverfahren. Da der *PSO*-Algorithmus nicht beeinflusst wird, kann dieses Partikel ohne störende Faktoren optimieren und das Minimum erreichen. Dies ist an der schrittweisen Bewegung des Partikels zu sehen, welche direkt zum Minimum verläuft. Das *VPSO*-Verfahren hat keine Korrektur des Störfaktors. Die Bewegung des Partikels ist somit sehr stark durch den Störfaktor beeinflusst, sodass dieses Partikel nicht das Minimum erreichen kann. Das Partikel vom *EPSO*-Verfahren wird auch von den genutzten Vektorfelder beeinflusst, jedoch ist die Position des Partikels deutlich näher am Optimum als das Partikel vom *VPSO* durch das verwendete Korrekturverfahren.

4 Implementierung der Simulation

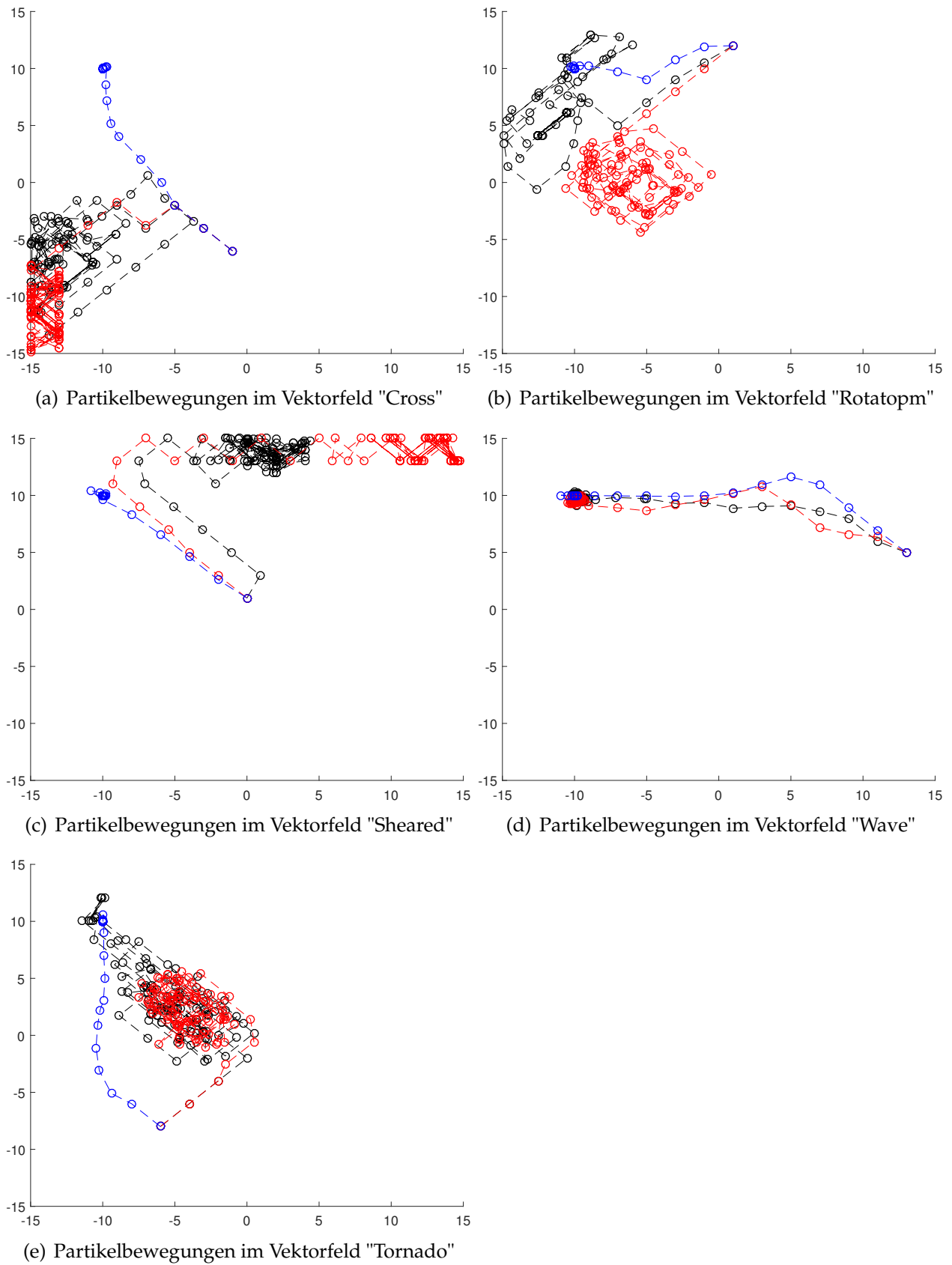


Abbildung 4.10: Darstellung der Partikelbewegungen in verschiedenen Vektorfeldern

4.7 Randbehandlung

In der Implementierung werden zwei Randbehandlungen durchgeführt. Für die optimierenden Schwärme der *EPSO*-, *PSO*- und *VPSO*-Verfahren wurde die Methode "reflect" aus Unterabschnitt 2.1.3 mit dem Algorithmus 3 umgesetzt. Optimierende Partikel, die den Suchraum verlassen würden, werden in den Suchraum zurückreflektiert. Dadurch können diese Partikel weiter dem Schwarm helfen ein neues Optimum zu finden. Die Geschwindigkeit wird nach der Reflexion nicht angepasst. Die Umsetzung dieser Variante ist nicht zeitaufwendig und einfach zu implementieren.

Für den explorierenden Schwarm wurde das Partikel zurück auf den Rand gesetzt, wenn dieses Partikel den Suchraum verlassen würde. Hierbei wird die Geschwindigkeit des Partikels auf 0 gesetzt. Dadurch werden Partikel, die den Suchraum verlassen nicht weiter für die Exploration des Suchraumes verwendet. Die Aufgabe der explorierenden Partike besteht nur darin den Windfluss folgen ohne weiteren Aufgaben. Dadurch ist die Komplexität dieser Implementation sehr gering.

5 Evaluation

5.1 Optimierungsfunktionen

In diesem Abschnitt werden drei Optimierungsfunktionen vorgestellt, die anhand des entwickelten Algorithmus *EPSO* ausgewertet wurden. Diese Optimierungsfunktionen sind eine sphärische Funktion, die Ackley-Funktion [B96], sowie die Rosenbrock-Funktion [Ros60]. Mit diesen Testfunktionen werden Algorithmen auf ihre Optimierungsweise überprüft.

5.1.1 Sphärische Funktion

Die sphärische Optimierungsfunktion gehört zu den einfachsten Problemen. Die Funktion besitzt nur ein globales Minimum im Punkt $[0, 0]$. Die mathematische Beschreibung des Funktionsterms sieht wie folgt aus:

$$F_1 : f(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2. \quad (5.1)$$

Wobei d der Anzahl der Dimensionen entspricht und in dieser Arbeit auf zwei gesetzt wurde [SSa].

In Abbildung 5.1 wird die Funktion im dreidimensionalen und zweidimensionalen Raum veranschaulicht. Helle Farben, wie zum Beispiel Gelb, entsprechen hohen Funktionswerten und dunklere Farben Funktionswerten, die nahe dem Minimum sind. Die zweidimensionale Darstellung ist das Resultat aus der Projektion der dreidimensionalen Funktion.

5 Evaluation

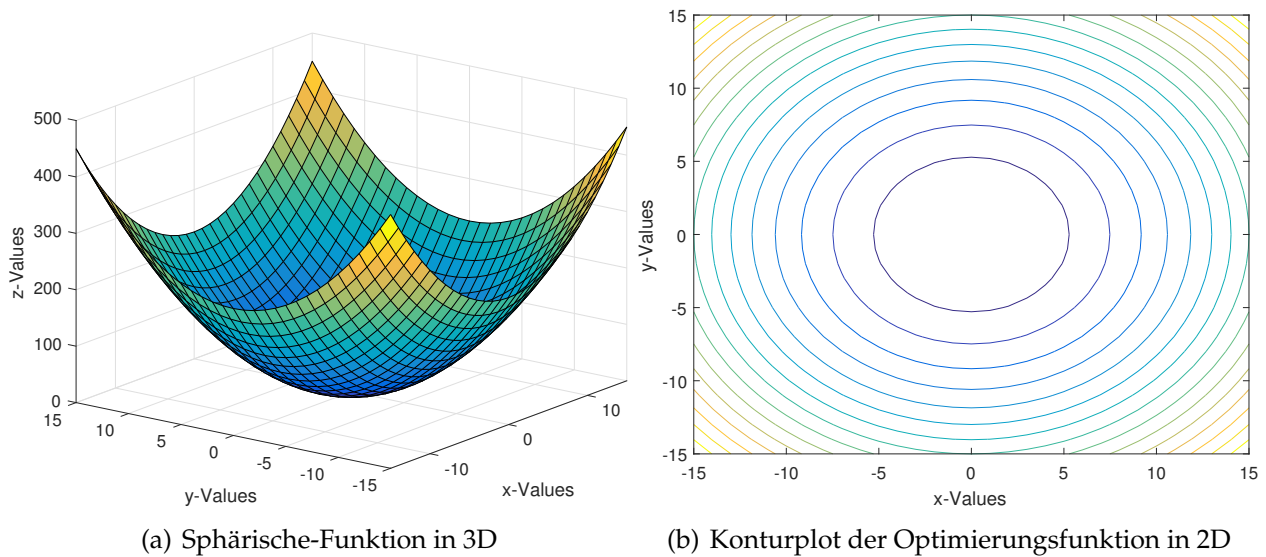


Abbildung 5.1: Sphärische-Testfunktion

5.1.2 Rosenbrock-Funktion

Die Rosenbrock-Funktion besitzt viele lokale Minima in einer Talregion und ein globales Minimum im Punkt $[0, 0]$. Diese Funktion wird auch als Bananenfunktion bezeichnet, da das Tal der Funktion aneinandergereihte lokale Minima hat.

Die Funktionsvorschrift der Rosenbrock-Testfunktion ist definiert durch:

$$F_2 : f(x) = \sum_{i=1}^{d-1} [100(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - 1)^2], \quad (5.2)$$

wobei d der Anzahl der Dimensionen entspricht [SSb].

In Abbildung A.1 ist auf der linken Seite die Darstellung der Rosenbrock-Funktion im dreidimensionalen Raum. Die Funktion ist an den Rändern sehr steil, sodass Optimierungsalgorithmen schnell im Tal landen, jedoch ist das globale Minimum schwer zu erreichen, da die Funktion im Tal sehr niedrige Werte besitzt, die sich nahe am Minimum $[0, 0]$ befinden. In der rechten Darstellung ist der Konturplot der Funktion. Hier wird eine Vergrößerung der Talregion visualisiert, die eine bogenförmige Struktur aufweist.

5 Evaluation

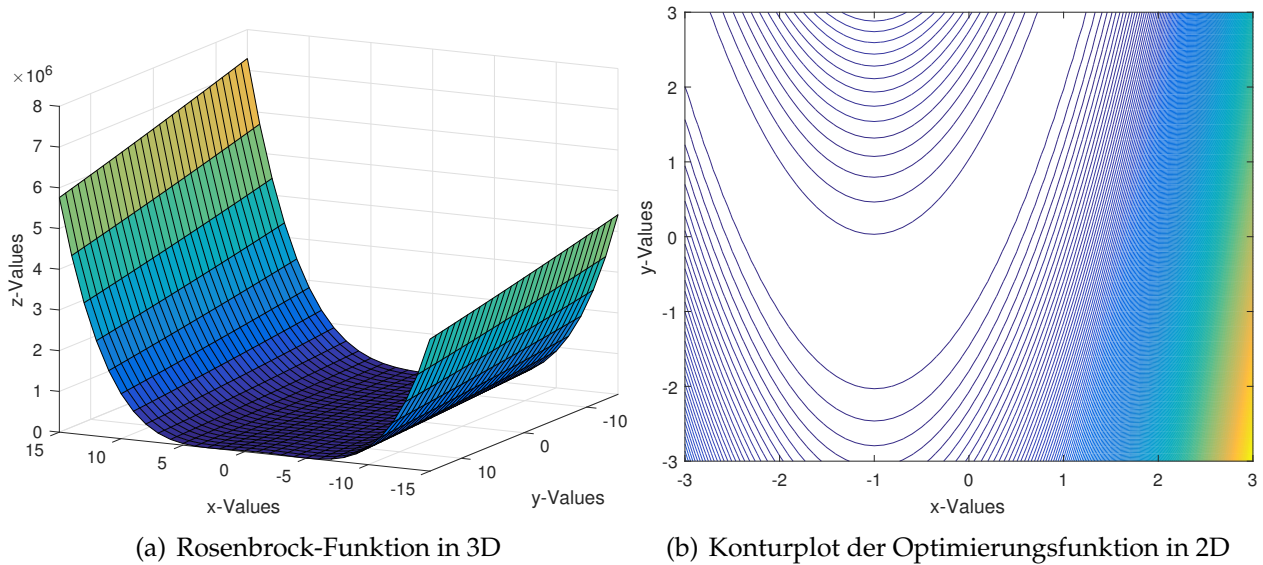


Abbildung 5.2: Rosenbrock-Testfunktion

5.1.3 Ackley-Funktion

Die Schwierigkeit der Ackley-Funktion sind die vielen lokalen Minima, die diese Testfunktion aufweist. Auch diese Funktion hat, wie die sphärische und Rosenbrock-Funktion ein globales Minimum im Punkt $[0, 0]$. Der Funktionsterm dieser Testfunktion sieht wie folgt aus:

$$F_3 : f(x) = -a * \exp \left(-b \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_i^2} \right) - \exp \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(cx_i) \right) + a + \exp(1), \quad (5.3)$$

wobei d der Anzahl der Dimensionen entspricht. Des Weiteren werden standardmäßig für den Parameter $a = 20$ gewählt, für den Wert $b = 0,2$ und für $c = 2\pi$ [SSc].

In Abbildung 5.3 ist auf der linken Seite die dreidimensionale Darstellung der Funktion zu sehen. In der Abbildung sind die lokalen Minima deutlich erkennbar. Diese vielen lokalen Minima können Optimierungsalgorithmen daran hindern, das Minimum der Funktion zu finden. Die rechte Darstellung zeigt den Konturplot der Funktion und entspricht einer Projektion der Oberfläche auf der Ebene.

5 Evaluation

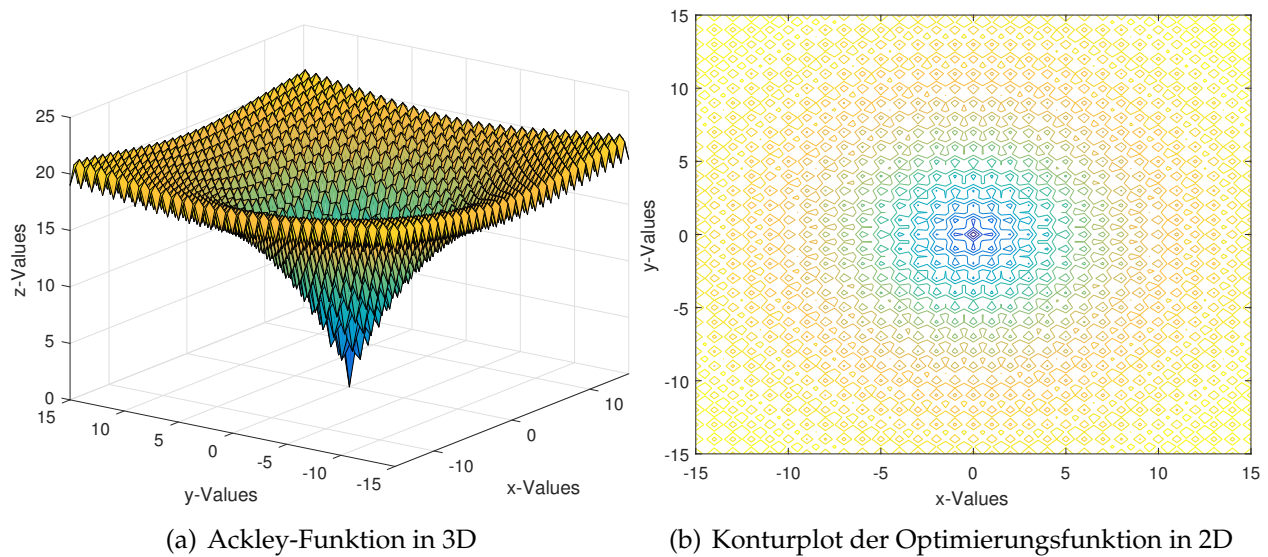


Abbildung 5.3: Ackley-Testfunktion

5.2 Simulation

5.2.1 Geschwindigkeitsbegrenzung

Der Großteil der Störfelder, die in dieser Arbeit genutzt werden, hat eine größere Auswirkung auf das *EPSO*-Verfahren, je weiter die besuchte Position vom Ursprung $[0, 0]$ entfernt ist. Durch die vorhandene Windstärke war die Simulation zunächst unmöglich durchzuführen, da die Stärke der Vektorfelder einen zu hohen Einfluss bei der Optimierung hatte. Die optimierenden Partikel wurden durch den Wind sehr schnell aus dem Suchraum transportiert. Durch die reflektierende Randbehandlung und der starken Störung konnten die Partikel den Suchraum nicht erkunden, sodass das Verhalten der Vektorfelder in Bezug auf die Vorteile, die solch ein Störfeld auf den optimierenden Schwarm haben kann, nicht untersucht werden konnte. Die Begrenzung der Partikelgeschwindigkeit dient dazu, dass die Partikel genügend Zeit haben ihre Position zu korrigieren. Die Geschwindigkeit der Partikel wurde auf maximal zwei gesetzt. Dadurch können die Partikel in einer Iteration eine maximale Schrittweite von zwei Gitterzellen haben. Für die Vergleichbarkeit der drei Algorithmen, wurde die Geschwindigkeitsbegrenzung für alle drei Verfahren durchgeführt. Diese Maßnahme verschlechtert den *PSO*-Algorithmus, da die globale Suche durch hohe Geschwindigkeiten zu Beginn der Simulation beschränkt wird, sodass das

5 Evaluation

Verfahren in einigen Simulationen mit bestimmten Parametereinstellungen benachteiligt wird.

5.2.2 Verschiebung der Funktionsminima

Für die Simulation der Parametereinstellungen wurden zunächst das Minimum der Testfunktionen verschoben. Dadurch, dass im Punkt $[0, 0]$ und in der unmittelbaren Umgebung des Suchraumes nur geringe Windstärken vorhanden sind, hatten diese Vektoren keinen bis nur geringen Einfluss auf die Optimierung. Ohne die Verschiebung wäre der Störfaktor fast vernachlässigbar. Die Minimum-Position der Testfunktionen wurde auf den Punkt $[-10, 10]$ verschoben. Je weiter das Minimum vom Ursprung $[0, 0]$ versetzt wird, desto größer ist der Störfaktor der Vektorfelder auf das Verfahren. Der Punkt wurde so gewählt, dass möglichst alle ausgewählten Vektorfelder das *EPSO*-Verfahren stark beeinflussen. Die Position des Minimums hat einen großen Einfluss auf die ausgewerteten Ergebnisse. So können einige Vektorfelder durch ihre Struktur den Schwarm des *EPSO*-Verfahrens begünstigen. Beobachtungen und die daraus zu schließenden Erkenntnisse werden in Abschnitt 5.3 erläutert.

Die angegebenen Funktionen in Abschnitt 5.1 werden für eine zweidimensionale Betrachtung folgendermaßen verändert, wobei s_x die Verschiebung um -10 in x-Richtung und s_y die Verschiebung um 10 ist:

Sphärische-Funktion

$$f(x) = (x - s_x)^2 + (y - s_y)^2 \quad (5.4)$$

Rosenbrock-Funktion

$$f(x) = 100 * ((x - s_x + 1)^2 - (y - s_y + 1))^2 + (x - s_y)^2 \quad (5.5)$$

Ackley-Funktion

$$\begin{aligned} f(x) = & -c1 * \exp(-c2 * \sqrt{\frac{(x - s_x)^2 + (y - s_y)^2}{2}}) \\ & - \exp\left(\frac{\cos(c3 * (x - s_x)) + \cos(c3 * (y - s_y))}{2}\right) \\ & + c1 + \exp(1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2.3 Erzeugung von Testdaten

Die Erzeugung von Testdaten wurde mithilfe des vorgestellten Statistikprogramms automatisiert. Dabei wurden viele unterschiedliche Parameter simuliert, jedoch musste eine Beschränkung der Simulationsparameter durchgeführt werden, da Simulation und Auswertungen aller möglichen Kombinationen im vorgegebenen Zeitrahmen nicht durchzuführen war. Der zeitliche Berechnungsaufwand steigt mit jedem weiteren Testparameter exponentiell an. Die folgenden unterschiedlichen Parameter wurden untersucht:

- Testfunktionen: $[F_1, F_2, F_3]$
- Vektorfelder: $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$
- $\omega = [0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$
- $N_{opt} = [5, 10, 15, 20, 30]$
- $N_{expl} = [20, 40, 80, 160, 320]$

Jede Kombination wurde für 100 Simulationen durchgeführt. Es wurde die Anzahl von 100 Simulationen ausgewählt, wodurch der Rechenaufwand gering und die statistische Aussagekraft erhalten bleibt. Jede Simulation wurde für 100 Iterationen ausgewertet. Die Anzahl der somit durchgeführten Simulationen beträgt:

$$3 * 5 * 5 * 5 * 100 = 37500.$$

Die Auswertung der erhaltenen Daten und die daraus resultierenden Erkenntnisse werden in den folgenden Abschnitten dargestellt.

5.2.4 Auswirkungen von Vektorfeldern auf die Explorationsrate

Die verschiedenen genutzten Vektorfelder V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 haben unterschiedliche Auswirkungen auf die explorierenden Partikel des *EPSO*-Verfahrens. Zunächst werden die

5 Evaluation

Auswertungen der Erkundungsraten der einzelnen Vektorfelder aus Abbildung A.1 beschrieben. Ein Erkundungsdiagramm ist so aufgebaut, dass auf der x-Achse die Anzahl der definierten explorierenden Partikel beschrieben wird. Diese entsprechen den Werten 20, 40, 80, 160 und 320. Auf der y-Achse wird die erkundete Umgebung in Prozent angegeben. Die Ergebnisse für eine geringere Anzahl an explorierenden Partikeln ist interessanter, da je mehr Partikel für die Umgebungssuche genutzt werden, auch mehr Informationen gesammelt werden können. Dadurch steigert sich die Komplexität enorm, sodass die Parameterbetrachtungen für eine Anzahl von explorierenden Partikeln von 160 und 320 für die Praxis nicht relevant sind. Trotzdem sind diese hohen Werte für die explorierenden Partikel wichtig, da sie zeigen, dass der Algorithmus mit ausreichend Information, ähnlich wie das *PSO*-Verfahren arbeiten kann.

Vektorfeld "Cross"

Die Abbildung A.1(a) beschreibt die Erkundungsrate für das Vektorfeld V_1 . Für eine Schwarmgröße von 20 explorierenden Partikeln hat die Auswertung für 100 Simulationen eine Erkundungsrate von 20 Prozent ergeben. Die doppelte Anzahl an explorierenden Partikeln ergibt eine Erfolgsrate von ca. 35 Prozent. Bei einer Anzahl von 80 Partikeln kann im Durchschnitt nur 50 Prozent des Suchraumes erkundet werden.

Da der Suchraum nur zu einem geringen Anteil erkundet worden ist, kann das *EPSO*-Verfahren nur geringe Korrekturen durchführen.

Vektorfeld "Rotation"

Abbildung A.1(b) beschreibt das Vektorfeld V_2 . Hier ist ein signifikanter Unterschied zum zuvor beschriebenen Vektorfeld V_1 zu sehen. Für eine geringere Anzahl an explorierenden Partikeln werden bessere Erkundungsraten erreicht. So beträgt die prozentuale Erkundung des Raumes bei 20 Partikeln ca. 55 Prozent, bei 40 Partikeln ca. 70 Prozent und bei 80 Partikeln 80 Prozent.

Das *EPSO*-Verfahren sollte bei diesem Vektorfeld eine hohe Anzahl an Korrekturen durchführen können und ein besseres Ergebnis erzielen.

Vektorfeld "Sheared"

Abbildung A.1(c) beschreibt Vektorfeld V_3 . Die Erkundungsraten für 20 explorierenden Partikeln betragen ca. 12 Prozent, für 40 Partikel ca. 22 Prozent und für 80 Partikeln ca. 38

5 Evaluation

Prozent.

Die Erkundungsraten für das Vektorfeld V_3 sind deutlich niedriger als beim Vektorfeld V_1 . Das Verfahren wird bei niedrigen Erkundungsraten nur eine geringe Erfolgsrate haben.

Vektorfeld "Wave"

Abbildung A.1(d) beschreibt das Vektorfeld V_4 . Die Ergebnisse sind höher im Vergleich zu Vektorfeld 1 und 3. Die Erkundungsrate für 20, 40 und 80 Partikeln betragen 40 Prozent, ca. 58 Prozent und etwas über 71 Prozent.

Das *EPSO*-Verfahren sollte auch hier häufige Geschwindigkeitskorrekturen durchführen können, da die Ergebnisse weit besser sind als im Vektorfeld V_1 .

Vektorfeld "Tornado"

Abbildung A.1(e) repräsentiert das Vektorfeld V_5 . Für eine Anzahl von 20 explorierenden Partikeln, ergibt sich eine Erfolgsrate von ca. 22 Prozent. Die doppelte Anzahl an Partikeln ergibt eine Erkundungsrate von ca. 37 Prozent und für 80 explorierende Partikeln werden ca. 53 Prozent des Suchraumes erkundet.

Das Vektorfeld V_5 ähnelt dem Vektorfeld V_1 in Bezug auf die Erkundungsraten.

Vergleich der Erkundungsraten

Die letzte Abbildung A.1(f) vergleicht alle Erkundungsraten der untersuchten Vektorfelder. Für diese Arbeit werden nur die Vektorfelder $V_1 - V_5$ betrachtet. Zu sehen ist, dass das Vektorfeld V_3 die schlechtesten Erkundungsraten hervorbringt und es dadurch schwierig wird für das *EPSO*-Verfahren erfolgreich zu optimieren. Die Vektorfelder V_1 und V_5 befinden sich im Mittelfeld im Vergleich zu allen untersuchten Vektorfeldern. Darauf folgt das Vektorfeld V_4 , welches einen deutlichen Abstand zu V_1 und V_5 hat. Für die Anzahl von 20 explorierenden Partikeln hat es eine Verbesserung der Erkundungsrate von ca. 18 Prozent. Das *EPSO*-Verfahren kann, da mehr von der Umgebung erkundet wird, häufiger Korrekturen durchführen. Das beste Vektorfeld in Bezug auf die Erkundungsrate ist das Feld V_2 . Dieses hat weitere 15 Prozent Abstand bei 20 explorierenden Partikeln zu Vektorfeld V_4 . Das Feld V_2 ist für das *EPSO*-Verfahren am hilfreichsten.

Einige Strukturen der vorgestellten Vektorfelder haben einen besonderen Einfluss auf die Erkundungsrate des *EPSO*-Verfahrens. So sind Felder, die in eine zirkuläre Struktur aufweisen, wie V_2 , besonders hilfreich bei der Erkundung der Umgebung.

5.2.5 Vergleich der Erfolgsraten für PSO, EPSO und VPSO

Der Vergleich der Auswertungen für die drei Optimierungsverfahren *EPSO*, *PSO* und *VPSO* wurde für die drei Testfunktionen F_1 , F_2 und F_3 durchgeführt. Die Beobachtungen und Ergebnisse der einzelnen Testfunktionen werden in separaten Abschnitten erläutert. Für die Auswertungen der getesteten Parametereinstellungen wurde für jede Testfunktion und jedes getestete Vektorfeld ein Diagramm für die Erfolgsrate der Optimierungsverfahren erzeugt. Des Weiteren wurde für jede Testfunktion und die dafür verwendeten Vektorfelder eine Tabelle erstellt, die den mittleren Fehler der 100 Simulationen angibt. Die Ergebnisse der Auswertungen wurden möglichst kompakt dargestellt, damit alle Auswertungen verglichen werden können. Dadurch muss zunächst der Aufbau der Erfolgsratendiagramme und die Tabellen für den mittleren Fehler erklärt werden.

Aufbau der Erfolgsraten-Diagramme

Für die Erfolgsraten wurden drei Tabellen, Tabelle C.1-Tabelle C.3, erzeugt, wobei jede Tabelle die Auswertung einer Testfunktion repräsentiert. Die Spaltenbeschreibung einer Tabelle wird mit *opt* bezeichnet und steht für die Anzahl der optimierenden Partikel und repräsentiert damit die Schwarmgröße N_{opt} für die untersuchten Verfahren. Die Schwarmgrößen $N_{opt} = [5, 10, 15, 20, 30]$ wurden hierbei getestet. Die Reihenbeschriftung *iw* steht für den Trägheitsfaktor ω . Die Trägheitsfaktoren $\omega = [0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$ wurden für das Testen der Erfolgsraten ausgewählt. Für jede Kombination dieser Werte wurden die Vektorfelder $V_1 - V_5$ als Störfelder genutzt. Die Ergebnisse dieser Kombinationen werden für jedes Vektorfeld zusammen in einem Erfolgsratendiagramm dargestellt. Ein Erfolgsratendiagramm wird durch zwei Achsen beschrieben. Auf der x-Achse steht die Anzahl der genutzten explorierenden Partikel für die Erkundung der unbekanntem Umgebung. Für die Anzahl der explorierenden Partikel N_{expl} wurden die Größen $N_{expl} = [20, 40, 80, 160, 320]$ getestet. Für den Wert 0 werden die Ergebnisse des *VPSO*-Verfahrens dargestellt. Außerhalb der Definition der x-Achse werden die Ergebnisse aus dem *PSO*-Verfahren gekennzeichnet. Auf der y-Achse wird die Erfolgsrate für die getestete Anzahl an explorierenden Partikeln zugeordnet. Zur besseren Unterscheidung ist jedes Vektorfeld in einer anderen Farbe dargestellt. Die Farbenzuordnung wird in der Legende Abbildung C.1 im Anhang C dargestellt. Außerdem werden die Erfolgsraten aus den *PSO*- und *VPSO*-Verfahren gesondert gekennzeichnet. Die Auswertungen des *PSO*-Verfahrens werden mit einem Stern und die *VPSO*-Erfolgsraten mit einem ausgefüllten Kreis dargestellt. Für jede Testfunktion gibt

5 Evaluation

es 25 Erfolgsratendiagramme und somit werden in der Summe 75 Diagramme dargestellt.

Aufbau der Tabellen für den mittleren Fehler

Für die Untersuchung des mittleren Fehlers wurden für jede Testfunktion $F_1 - F_3$ fünf Tabellen erzeugt Anhang D. Eine Tabelle repräsentiert ein getestetes Vektorfeld für eine spezifische Testfunktion. Die Spalten und Reihen werden zunächst unterteilt für jeden untersuchten Trägheitsfaktor ω . Die Trägheitsfaktoren sind auch hier $\omega = [0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$. Die Reihenbezeichnung *opt* steht für die Anzahl der optimierenden Partikel und beschreibt die Schwarmgröße N_{opt} der drei Verfahren. Auch hier sind die getesteten Schwarmgrößen $N_{opt} = [5, 10, 15, 20, 30]$. Die Spaltenbenennung *expl* beschreibt die Anzahl der explorierenden Partikel für das *EPSO*-Verfahren. Die dargestellte Anzahl der explorierenden Partikel ist $N_{expl} = [0, 20, 40, 80, 160, 320, none]$. Die Auswertung für die Anzahl von 0 gehört zum *VPSO*-Verfahren. Werte die im Bereich *none* stehen, sind die mittleren Fehler des *PSO*-Verfahrens.

Die Evaluierung der Ergebnisse erfolgt für 20, 40 und 80 explorierende Partikel für das *EPSO*-Verfahren, da mit zunehmender Anzahl die Komplexität des Algorithmus zunimmt. Außerdem sind niedrigere Werte für die Praxis interessanter, da die Umsetzung dieser Werte realistischer ist.

Vergleich der Auswertungen für die sphärische Testfunktion

Die Erfolgsrate bei der sphärischen Testfunktion unterscheidet sich für jedes genutzte Vektorfeld, welches das Optimierungsverfahren *EPSO* stören soll. Im Anhang Tabelle C.1 werden die Erfolgsraten für die sphärische Testfunktion dargestellt. In den Tabellen Tabelle D.1 - Tabelle D.5 sind die mittleren Fehler der Optimierungsverfahren zu sehen.

Für $N_{opt} = 5$ sind die Erfolgsraten für alle Vektorfelder gering. Das Vektorfeld V_2 weist bei einer explorierenden Schwarmgröße von $N_{expl} = 40$ eine durchschnittlichen Erfolgsrate von ca. 35 Prozent auf und ist damit am besten. Für die doppelte Anzahl an explorierenden Partikeln hat dieses Vektorfeld eine Erfolgsrate von ca. 60 Prozent. Bei einem Trägheitsfaktor von 0,8 erreicht das Vektorfeld V_2 eine Erfolgsrate von fast 70 Prozent und ist damit allen Auswertungen für diese Schwarmgröße überlegen.

Das *VPSO*-Verfahren hat eine durchschnittliche Erfolgsrate von unter 10 Prozent, bei einer Schwarmgröße von $N_{opt} = 5$. Eine deutliche Abweichung gibt es bei einem Trägheitsfaktor von $\omega = 1$ und beim Vektorfeld V_4 . Hier liegt die Erfolgsrate bei ca. 33 Prozent.

Die Erfolgsrate des *PSO*-Verfahrens steigt mit größerem Trägheitsfaktor und erreicht bei $\omega = 1$ eine Erfolgsrate von ca. 63 Prozent.

5 Evaluation

Durch die geringe Schwarmgröße der optimierenden Partikel, ist den Schwarm eine globale Suche nicht möglich, sodass nur geringe Erfolgsraten zu sehen sind.

Für eine Größe von $N_{opt} = 15$ für den optimierenden und $N_{expl} = 20$ für den explorierenden Schwarm hat im Durchschnitt das Vektorfeld V_2 eine Erfolgsrate von ca. 30 Prozent und das Vektorfeld V_4 eine Erfolgsrate von ca. 60 Prozent. Mit 40 bzw. 80 explorierenden Partikeln steigt die Erfolgsrate deutlich. Für das Vektorfeld V_2 ergibt sich eine durchschnittliche Erfolgsrate von ca. 80 Prozent und für das Vektorfeld V_4 eine Erfolgsrate von ca. 55 Prozent für einen Trägheitsfaktor von $\omega = [0.3, 0.4, 0.6]$ und für die Trägheitsfaktoren $\omega = [0.8, 1.0]$ ist die Erfolgsrate sogar zwischen 90-100 Prozent.

Das *VPSO*-Verfahren hat beim Vektorfeld V_4 die höchsten Erfolgsraten von bis zu 95 Prozent.

Ab einer Schwarmgröße von $N_{opt} = 15$ sind beim *PSO*-Verfahren die Erfolgsraten über 50 Prozent und bei höheren Trägheitsfaktoren sogar 100 Prozent.

Die zunehmende Größe von N_{opt} hat eine positive Auswirkung auf die Erfolgsraten der Verfahren.

Mit zunehmender Schwarmgröße von $N_{opt} = [20, 30]$ liegt die Erfolgsrate der Optimierung bei Vektorfeld V_2 und V_4 für eine Anzahl von explorierenden Partikeln $N_{expl} = [40, 80]$ über 80 Prozent und in einigen Fällen auch deutlich über 90 Prozent.

Für das *VPSO*-Verfahren hat das Vektorfeld V_4 die größten Erfolgsraten. Mit steigender Schwarmgröße und größeren Trägheitsfaktoren sind hier Erfolgsraten von bis zu 100 Prozent möglich.

Für $N_{opt} = 20$ hat das *PSO*-Verfahren eine Erfolgsrate von durchschnittlich 90 Prozent. Mit einem Trägheitsfaktor ab $\omega = 0.8$ beträgt die Erfolgsrate 100 Prozent.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Vektorfelder V_2 und V_4 eine deutlich erhöhte Erfolgsrate haben gegenüber den Vektorfeldern V_1 , V_3 und V_5 . Bei diesen können Erfolgsraten von über 80 Prozent erreicht werden, wenn für die optimierende Schwarmgröße $N_{opt} > 15$ gilt und mindestens $N_{expl} > 20$ explorierende Partikel genutzt werden. Der mittlere Fehler für das Vektorfeld V_2 beträgt bei $N_{expl} = 40$, 0.05 ± 0.33 und sinkt mit zunehmender Erhöhung der Parameter auf einen Fehler von 0.00 Tabelle D.2. Für das Vektorfeld V_4 liegt der mittlere Fehler im Durchschnitt deutlich über dem mittleren Fehler des Vektorfeldes V_2 . Der mittlere Fehler sinkt für das Vektorfeld V_4 auf 0.00 für höhere Trägheitsfaktoren ab $\omega > 0.6$ Tabelle D.4. Die Auswertung des Vektorfeldes V_1 zeigt, dass dieses Feld das Verfahren stark beeinflusst. Dieses Feld unterliegt den anderen getesteten Vektorfeldern

5 Evaluation

in der Erfolgsrate bei fast allen ausgewerteten Parametern. Nur mit einer sehr hohen Anzahl an explorierenden Partikeln von 160 oder 320 ist es hier möglich den mittleren Fehler gering zu halten Tabelle D.1. In der folgenden Tabelle 5.1 werden die Auswirkungen der Vektorfelder auf das *EPSO*-Verfahren zusammengefasst. Vektorfelder, die eine positive Auswirkung auf die Erfolgsrate hatten werden mit "++" oder "+" gekennzeichnet, durchschnittliche Erfolgsraten mit "o" und bei starken Störungen des *EPSO*-Verfahrens mit "-".

	V_2	V_4	V_3	V_5	V_1
EPSO	++	+	o	o	-

Tabelle 5.1: Klassifizierung der Erfolgsraten für die sphärische Funktion

Vergleich der Auswertungen für die Rosenbrock-Testfunktion

Die Auswertungen der Erfolgsraten für die Rosenbrock-Testfunktion sind in Tabelle C.2 gegeben. Im Vergleich zu den Erfolgsraten der sphärischen Funktion sind die Erfolgsraten für diese Testfunktion im Durchschnitt deutlich geringer.

Die Vektorfelder V_2 und V_4 sind auch bei der Rosenbrock-Funktion am hilfreichsten für die Optimierung des *EPSO*-Verfahrens. Dabei ist die Erfolgsrate des Vektorfeldes V_4 ab einer Schwarmgröße $N_{opt} = 15$ im Durchschnitt über 50 Prozent und für $N_{opt} > 15$ erreicht die Erfolgsrate bis zu 90 Prozent. Vektorfeld V_4 ist für die Rosenbrock Funktion am erfolgreichsten. Darauf folgt das Vektorfeld V_2 , welches ab einer Schwarmgröße von $N_{opt} > 15$ Erfolgsraten von ca. 50 Prozent erreichen kann. Hier beträgt der mittlere Fehler für eine Anzahl von $N_{expl} > 20$ explorierenden Partikeln fast 0 Tabelle D.7. Die Vektorfelder V_1 , V_3 und V_5 haben insgesamt nur eine geringe Erfolgsrate.

Erwähneswert ist hierbei die *VPSO*-Erfolgsrate für das Vektorfeld V_4 , die mit einem großen Abstand vor den anderen getesteten Vektorfeldern liegt.

Die Erfolgsrate des *PSO*-Verfahrens nimmt mit zunehmendem Trägheitsfaktor und größeren optimierenden Schwärme zu. Die Vektorfelder V_1 , V_3 und V_5 haben in der gesamten Auswertung nur eine geringe Erfolgsrate. Das erfolgreichste Feld ist das Vektorfeld V_4 , gefolgt von V_2 .

Vergleich der Auswertungen für die Ackley-Testfunktion

Die Stabilität des Algorithmus bei der Ackley-Testfunktion ist nur gering. Die Erfolgsraten bleiben für die Anzahl von $N_{expl} = [20, 40, 80]$ explorierenden Partikeln unter 40 Prozent.

5 Evaluation

In Tabelle C.3 sind alle Erfolgsraten der Ackley-Funktion dargestellt.

Für das *VPSO*-Verfahren bleiben die Erfolgsraten deutlich unter 10 Prozent.

Die Erfolgsraten für das *PSO*-Verfahren steigen mit zunehmender Schwarmgröße und werden bei einem höherem Trägheitsfaktor stabiler in Bezug auf die Erfolgsrate. Die mittleren Fehler (Tabelle D.11-Tabelle D.15) sind nur sehr gering bei den einzelnen untersuchten Parametern. Die gesamten Erfolgsraten für die Optimierung des *EPSO*-Verfahrens sind deutlich niedriger als bei der sphärischen und der Rosenbrock-Testfunktion.

Auswertungen des *EPSO*-Verfahrens mit Fehler-Plots

Für die Evaluation des *EPSO*-Verfahrens wurde ein realistisches Beispiel für die Testfunktionen F_1 , F_2 und F_3 ausgewählt und genauer betrachtet. Es werden die aus der Simulation erhaltenen Fehler-Plots untersucht und auf die Funktionsweise des *EPSO*-Verfahrens eingegangen. Die folgenden Parameter wurden für dieses Beispiel festgelegt:

- Testfunktionen: $[F_1, F_2, F_3]$
- Vektorfelder: $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$
- $\omega = 0.6$
- $N_{opt} = 30$
- $N_{expl} = 20$

Aus der Simulation sind die Fehler-Plots Abbildung B.1, Abbildung B.2 und Abbildung B.3 entstanden, die im Anhang B zu finden sind.

Die Abbildungen bestätigen, dass die Vektorfelder V_2 und V_4 einen positiven Einfluss auf das Optimierungsverfahren haben. Bei allen drei Testfunktionen sind diese Vektorfelder die erfolgreichsten, da der dargestellte Fehler für das *EPSO*-Verfahrens am geringsten ist im Vergleich zu den Vektorfeldern V_1 , V_3 und V_5 . Die Begründung für die positive Auswirkung des Vektorfeldes V_2 ist auf die Struktur des Vektorfeldes zurückzuführen. Wie im Unterabschnitt 5.2.4 beschrieben wird, hat das Vektorfeld V_2 eine hohe Explorationsrate durch die zirkuläre Struktur. Dadurch kann eine fast vollständige Karte der unbekanntenen Umgebung erzeugt werden mit nur wenigen explorierenden Partikeln. Die Bewusstseinsrate beträgt ab der 50. Iteration, ca. 90 Prozent. Dies bedeutet, dass 90 Prozent der optimierenden Partikel eine Korrektur durchgeführt haben. Auch das Vektorfeld V_4 hat eine positive Auswirkung auf das *EPSO*-Verfahren. Die Bewusstseinsrate liegt bei

ca. 30 Prozent ab der 20. Iteration. In Unterabschnitt 5.2.4 wird die Struktur des Vektorfeldes V_4 beschrieben. Die Windstärken des Vektorfeldes sind gering und haben deshalb nur einen geringen Einfluss auf das *EPSO*-Verfahren.

5.3 Simulationsergebnisse

Die Ergebnisse aus den Beobachtungen werden in diesem Abschnitt zusammengefasst. Für die sphärische Testfunktion weisen die Vektorfelder V_2 und V_4 hohe Erfolgsraten auf. Diese Vektorfelder konnten die Optimierung des *EPSO*-Verfahrens positiv beeinflussen. Dies ist auf den Aufbau der Vektorfelder zurückzuführen. Das Vektorfeld V_2 ist ein zirkuläres statisches Vektorfeld. Die Windvektoren folgen einer Kreisbewegung gegen den Uhrzeigersinn. Dadurch, dass explorierende Partikel nur selten den Rand verlassen, kann ein großer Anteil des unbekanntes Suchraumes mit einer geringen Anzahl an explorierenden Partikel erkundet werden. Außerdem werden optimierende Partikel, die sich am oberen rechten Rand des Suchraumes befinden, in Richtung des Optimums an die Position $[-10, 10]$ gelenkt. Die hohen Erfolgsraten für das Vektorfeld V_4 sind durch die Windstärken des Vektorfeldes zu erklären. Da dieses Vektorefeld aus den trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus besteht, sind die resultierenden Vektoren des Feldes schwächer als bei den anderen genutzten Vektorfeldern. So hat dieses Vektorfeld nur einen geringen, aber spürbaren Einfluss, wodurch der *EPSO*-Algorithmus trotz Abweichungen so ähnlich wie das *PSO*-Verfahren arbeiten kann. Die geringen Erfolgsraten des Vektorfeldes V_1 können auch durch dessen Struktur erklärt werden. Das Optimum befindet sich in der linken oberen Ecke des Suchraumes und die Vektoren des Vektorfeldes zeigen in Richtung des Ursprungs $[0, 0]$. Somit werden die optimierenden Partikel vom Optimum in Richtung des Ursprunges gelenkt und hindern den *EPSO*-Algorithmus besonders. Die Erfolgsraten für die Testfunktionen Rosenbrock und Ackley sind im Durchschnitt sehr gering und weit unter 50 Prozent. Die Schwierigkeit dieser Funktionen sind bei Rosenbrock das Tal, wo sich das Minimum befindet und bei der Ackley-Funktion die vielen lokalen Minima. Durch die Geschwindigkeitsbegrenzung, die durchgeführt wurde, um die Einwirkung der Vektorfelder auf das Optimierungsverfahren zu reduzieren, können die optimierenden Partikel keine globale Suche im Lösungsraum führen. Dies ist aber für die Rosenbrock- und Ackley-Funktion wichtig, damit der Schwarm nicht in lokalen Minima festgehalten wird. Die geringen Erfolgsraten des *PSO*-Verfahrens sind auch durch

5 *Evaluation*

die Geschwindkeitsbegrenzung zu erklären und die damit verhinderte globale Suche des Schwarmes.

6 Fazit

6.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigte sich mit der Entwicklung eines neuen Algorithmus mit dem Namen *EPSO*. Die Motivation dieser Arbeit war die Frage, ob es möglich ist, einen Schwarm in einer unbekanntenen Umgebung mit gegebener Testfunktion optimieren zu lassen, wobei er durch Störfaktoren, wie Wind, beeinflusst wird. Dabei wurde der Ansatz von Multischwärmen genutzt, um Aufgaben auf verschiedene Schwärme zu verlagern. Die Aufgabe des explorierenden Schwarmes ist die Erstellung einer Umgebungskarte durch explorierende Partikel. Der optimierende Schwarm ist für die Optimierung einer gegebenen Zielfunktion zuständig. Des Weiteren musste für dieses Problem die Bewegungsgleichung des *PSO*-Verfahrens verändert werden, sodass der Störfaktor durch die gesammelte Informationen aus dem explorierenden Schwarm der Umgebung korrigiert wird. Die Informationen aus der erstellten Umgebungskarte werden genutzt, um die Partikelgeschwindigkeit der optimierenden Partikel zu korrigieren. Für die Korrektur der Partikelgeschwindigkeiten war es wichtig eine Kommunikation zwischen den Schwärmen zu ermöglichen. Dies wird durch die Parallelisierung beider Schwärme in zwei verschiedenen Prozessen ermöglicht, sodass beide Aufgaben gleichzeitig bearbeitet werden können. Der optimierende Schwarm nutzt dabei in jeder Iteration des Verfahrens die gesammelten Informationen des explorierenden Schwarmes, um die Partikelgeschwindigkeit zu korrigieren. Für die Auswertung des *EPSO*-Algorithmus wurden drei Testfunktionen ausgewählt, die sphärische Funktion, die Rosenbrock-Funktion und die Ackley-Funktion, um die Stabilität der Implementierung zu überprüfen. Außerdem wurden fünf Vektorfelder genutzt, die den Störfaktor repräsentieren sollten. Das *EPSO*-Verfahren wurde mit zwei weiteren Verfahren, dem *PSO*-Verfahren und dem *VPSO*-Verfahren, verglichen. Das *VPSO*-Verfahren repräsentiert hierbei den normalen *PSO*-Algorithmus mit der Berücksichtigung des Störfeldes. Die Auswertung ergab, dass die Struktur der genutzten Vektorfelder den *EPSO*-Algorithmus

positiv oder negativ beeinflussen, je nachdem wo sich das Minimum der Funktion im Suchraum befindet. Die Maßnahme der Geschwindigkeitsbegrenzung ermöglichte eine bessere Untersuchung des *EPSO*-Verfahrens, jedoch wurden die Erfolgsraten des *EPSO*- und *PSO*-Verfahrens in schwierigen Testumgebungen, wie der Rosenbrock- und Ackley-Funktion, dadurch vermindert. Es wurde gezeigt, dass das *EPSO*-Verfahren in einer unbekanntenen Umgebung funktionieren kann.

6.2 Weitere Probleme

Aus den Rückschlüssen der Simulationsergebnisse ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeitsbegrenzung problematisch für das Optimierungsverfahren sein kann. Bei der Entfernung der Geschwindigkeitsbegrenzung muss berücksichtigt werden, dass sich optimierende Partikel mehrere Zellen weit im Suchraum bewegen können. Das jetzige Verfahren berücksichtigt nur den Windvektor an der jeweiligen Position des Partikels. Bewegt sich nun dieses Partikel mehrere Zellen weit, muss die Berechnung der Geschwindigkeit verändert werden, indem alle Windvektoren, die innerhalb der Bewegung zur Zielposition auftreten, aufaddiert werden.

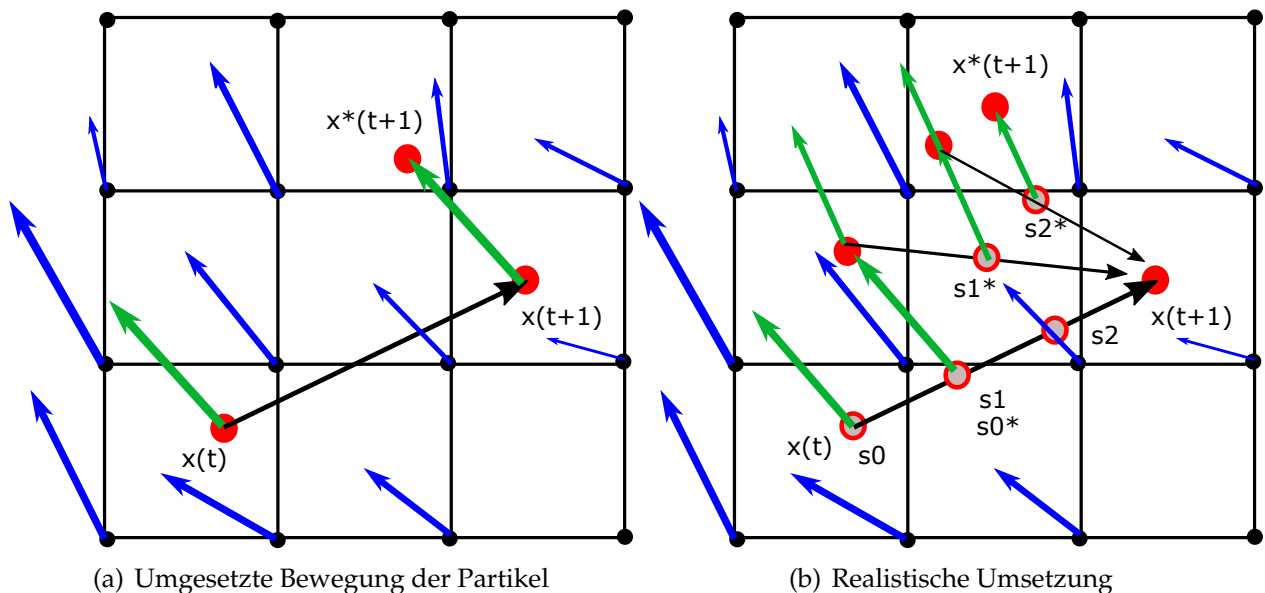


Abbildung 6.1: Auswirkung des Windes auf die Partikelbewegung

6 Fazit

In Abbildung 6.1(a) wird die momentane Umsetzung gezeigt. Die Bewegung des Partikels ohne Berücksichtigung des Windes wird als schwarzer Vektor gekennzeichnet. Dabei bewegt sich das Partikel von Position $x(t)$ zur Zielposition $x(t + 1)$, die in der nächsten Iteration des Algorithmus berechnet wird. Der Windvektor an der Position des Partikels $x(t)$ verändert dabei die Zielposition $x(t + 1)$. Der grüne Vektor repräsentiert hierbei den interpolierten Windvektor an der Stelle $x(t)$ und die blauen Vektoren stellen die Windvektoren der erkundeten Umgebung dar. Durch den Einfluss des Windes landet das Partikel auf dem Punkt $x^*(t + 1)$.

Die Abbildung 6.1(b) visualisiert eine mögliche Verbesserung des Algorithmus. Wenn sich ein Partikel mehrere Zellen weit bewegt, so wird dieses Partikel durch unterschiedliche Vektoren beeinflusst. Eine Möglichkeit wäre die Länge der geplanten Bewegungstrecke zu berechnen. Diese Strecke wird in einer Anzahl von kleineren Strecken unterteilt. Die Anzahl an Strecken entspricht der Anzahl an Bewegungen eines Partikels die getestet werden. Die Anzahl an Bewegungen müssen vom Benutzer eingestellt werden. Eine größere Anzahl an Bewegungsschritten führt zu einer genaueren Berechnung der unterschiedlichen Winde, die auf das Partikel einwirken, aber es müssen mehr Berechnungen für jedes einzelne Partikel durchgeführt werden.

Die Anfangspunkte der verkleinerten Strecken in diesem Beispiel werden mit s_0 , s_1 und s_2 bezeichnet. Für diesen Fall werden drei Windvektoren innerhalb der Bewegungstrecke einberechnet. Nun wird für den Punkt s_0 der Windvektor an der Stelle interpoliert. Das Partikel bewegt sich nun in Richtung s_1 und wird durch den interpolierten Windvektor an der Stelle s_0 gestört. Nun befindet sich das Partikel, welches trotzdem die Zielposition $(t + 1)$ erreichen möchte in einer anderen Position. Nun wirkt in dieser Strecke ein neuer interpolierter Vektor. Es wurde in diesem Beispiel festgelegt, dass nach dem ersten Schritt der Vektor auf die Hälfte der Strecke einwirkt. Dieses Verfahren wird für die Anzahl der ausgewählten Bewegungsschritte wiederholt. Wie zu sehen ist, unterscheidet sich die errechnete Endposition des Partikels $x^*(t + 1)$ von der Position $x^*(t + 1)$ aus Abbildung 6.1(a).

Ein weiteres Problem stellen die ausgewählten Vektorfelder dar. Der Großteil der Vektorfelder enthält sehr starke Kräfte, die linear mit dem Abstand zum Ursprung ansteigen. Dies bedeutet, dass die berechneten Vektoren einen zu großen Einfluss auf die Bewegung der Partikel haben. Dadurch musste die Geschwindigkeitsbegrenzung eingeführt werden. Eine Lösung hierfür wäre eine Abschwächung des Vektorfeldes durch einen ausgewählten Faktor, sodass möglichst unterschiedliche Vektoren vorhanden sind, aber das Optimierungsverfahren funktionsfähig bleibt.

6.3 Ausblick

Diese Arbeit diene der Grundlagenforschung in dem Bereich der Partikelschwarmoptimierung mit Einwirkungen von Vektorfeldern. Es wurde gezeigt, dass Vektorfelder einen positiven Einfluss auf das Optimierungsverfahren haben können. Gleichzeitig sind neue Fragen aus den hier vorgestellten Ergebnissen entstanden, sodass diese Arbeit als Grundlage für neue Forschungsarbeiten genutzt werden kann.

Ein mögliche Fragestellung wäre, inwiefern die Anfangspositionen der explorierenden Partikel des EPSO-Verfahrens einen Einfluss auf die Erkundungsrate haben. Beispielsweise können Muster überprüft für die Initialisierung der Startpositionen von den explorierenden Partikeln werden. Weiter kann untersucht werden, wie viel der Umgebung wirklich erkundet sein muss, damit das Verfahren in einer unbekanntem Umgebung funktioniert. Es könnte überprüft werden, ob nach einer bestimmten Menge gesammelter Informationen über die Umgebung eine Approximation des Suchraums möglich ist.

Außerdem könnte untersucht werden, ob die Umsetzung der beiden Schwärme in einem einzelnen Schwarm möglich ist. Der Vorteil hierbei wäre die Reduktion der Anzahl von genutzten Partikeln. Die Schwierigkeit wird hierbei sein, die Fehlerfortpflanzung in der Bewegung durch den Trägheitsfaktor ω zu minimieren.

Darüber hinaus können weitere unterschiedliche Vektorfelder oder Zielfunktionen genutzt und die Stabilität des Algorithmus getestet werden.

Die Komplexität kann hierbei fast beliebig gesteigert werden, indem das Verfahren für mehrdimensionale Probleme erweitert wird. Es könnten mehrdimensionale Vektorfelder genutzt werden, die nicht statisch sind, sondern sich mit der Zeit verändern.

Ein weiteres zu untersuchendes Problem in der Praxis stellt die begrenzte Energiequelle da. Es könnte überprüft werden, ob der Einfluss von Vektorfeldern genutzt werden kann, sodass durch eine kluge Pfadplanung der optimierenden Partikel Energie eingespart werden kann.

Literaturverzeichnis

- [Alt09] Altman, Yair: *Export figures*. <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23629-export-fig>, 2009
- [AR04] Asanga Ratnaweera, Harry C. W. Saman K. Halgamuge H. Saman K. Halgamuge: Self-Organizing Hierarchical Particle Swarm Optimizer With Time-Varying Acceleration Coefficients. In: *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION, VOL.8, NO.3* (2004)
- [Bö6] Bäck, Dr. T.: *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice: Evolution Strategies, Evolutionary Programming, Genetic Algorithms*. Oxford University Press, 1996
- [BB04] Blackwell, Tim; Branke, Jürgen: *Multi-swarm Optimization in Dynamic Environments*. Springer Berlin Heidelberg, 2004
- [BK07] Bratton, D.; Kennedy, James: Defining a Standard for Particle Swarm Optimization. In: *Proceeding of the 2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium* (2007)
- [Bus03] Buss, Samuel R.: *3D Computer Graphics A Mathematical Introduction with OpenGL*. Cambridge University Press, 19.05.2003
- [Cle06a] Clerc, Maurice: *Confinements and Biases in Particle Swarm Optimisation*. http://clerc.maurice.free.fr/pso/Confinements_and_bias.pdf, 2006
- [Cle06b] Clerc, Maurice: *Particle Swarm Optimization*. ISTE, 2006
- [DSS12] Douglas S. Shafer, Zhiyi Z.: *Beginning Statistics*. <http://2012books.lardbucket.org/pdfs/beginning-statistics.pdf>, 2012
- [EB99] Eric Bonabeau, Guy T. Marco Dorigo D. Marco Dorigo: *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, 1999

Literaturverzeichnis

- [EK95] Eberhart, Russell; Kennedy, James: A New Optimizer Using Particle Swarm Theory. (1995)
- [Eng07] Engelbrecht, Andries P.; Edition, Second (Hrsg.): *Computational Intelligence: an introduction*. John Wiley & Sons, 2007
- [FZ11] Fuqing Zhao, Jizhe W. Jianxin Tang T. Jianxin Tang: An Improved PSO Algorithm with Decline Disturbance Index. In: *Journal of computers, Vol. 6, No. 4* (2011)
- [Gon11] Gong, Yong T. Jian-hua Zhang Z. Jian-hua Zhang: Multi-objective Particle Swarm Optimization for Robot Path Planning in Environment with Danger Sources. In: *Journal of Computers, Vol. 6, No. 8* (2011)
- [GP11] Gazi, Veysel; Passino, Kevin M.: *Swarm Stability and Optimization*. Springer, 2011
- [Hof16] Hoffman, Dale: *Contemporary Calculus V*. Bellevue College, 2016
- [KE01] Kennedy, James; Eberhart, Russell C.: *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001
- [KEP09] Konstantinos E. Pasopoulos, Michael N. V.: *Particle Swarm Optimization and Intelligence: Advances and Application*. Information Science Reference, 2009
- [Kur17] Kurtl, Winfried: *Grundlagen 2D-Vektorfelder*. <http://www.uni-forst.gwdg.de>, 2017
- [Li16] Li, Andrey V. Savkinm H.: Collision Free Navigation of a Non-holomic Ground Robot for Search and Building Maps of Unknown Areas with Obstacles. In: *Proceedingd of the 35th Chines Control Conference* (2016)
- [Luk13] Luke, Sean: *Essentials of Metaheuristics*. second. Lulu, 2013. – available at [http://cs.gmu.edu/~sim\\$sean/book/metaheuristics/](http://cs.gmu.edu/~sim$sean/book/metaheuristics/)
- [Mat17a] Mathworks: *MATLAB*. <https://de.mathworks.com/products/matlab.html>, 2017
- [Mat17b] Mathworks: *Produkte und Dienstleistungen*. <https://de.mathworks.com/products.html>, 2017

Literaturverzeichnis

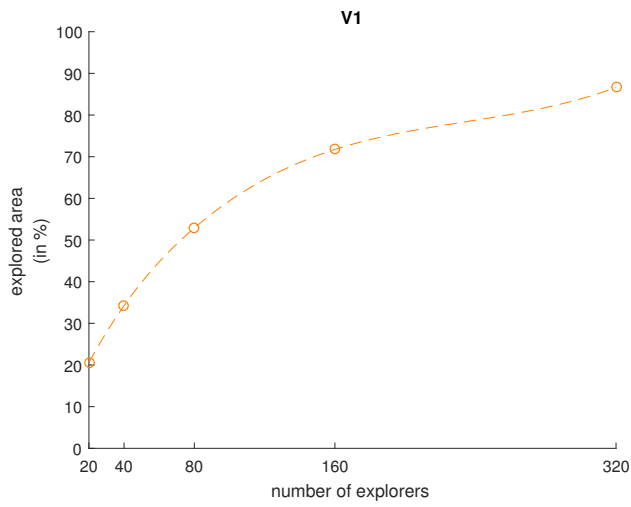
- [Oli13] Oliver, Peter J.: *Vector Calculus in Two Dimension*. http://www-users.math.umn.edu/~%20oliver/ln_/vc2.pdf, 2013
- [PH11] Peng Hu, Cao Liang-Lin Li R. Li Rong: Multiple Swarms Multi-objective Particle Swarm Optimization Based on Decomposition. (2011). – 2011 Published by Elsevier Ltd
- [Poz01] Pozrikidis, C.: *Fluid Dynamics: Theory, Computation, and Numerical Simulation*. Springer Science & Business Media, 2001
- [Ros60] Rosenbrock, H.H.: An Automatic Method for finding the Greatest or Least Value of a Function. In: *Comput. J.* 3: 175-84 (1960)
- [Sch15] Schmitt, Berthold I.: *Convergence Analysis for Particle Swarm Optimization*. FAU University Press, 2015
- [SH09] Sabine Helwig, Rolf W. Frank Neumann N. Frank Neumann: Particle Swarm Optimization with Velocity Adaption. In: *Adaptive Intelligent Systems, 2009. ICAIS 09. International Conference* (2009)
- [SHM13] Sabine Helwig, Jürgen B.; Mostaghim, Sanaz: Experimental Analysis of Bound Handling Techniques in Particle Swarm Optimization. In: *IEEE Transaction on Evolutionary Computation* (2013)
- [SMW06] Sanaz Mostaghim, Werner E. H.; Wille, Anja: *Linear multi-objective particle swarm optimization*. Bd. In Abraham, A.; Grosan, C.; Ramos, adn V., editors, Stigmergy optimization, volume 31 of Computational Science, chapter 9, pages 209-237. Springer Verlag, 2006
- [SSa] Sonja Surjanovic, Simon F. Derek Bingham B. Derek Bingham: *Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets*. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/spheref.html>,
- [SSb] Sonja Surjanovic, Simon F. Derek Bingham B. Derek Bingham: *Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets*. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/rosen.html>,
- [SSc] Sonja Surjanovic, Simon F. Derek Bingham B. Derek Bingham: *Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets*. <https://www.sfu.ca/~ssurjano/ackley.html>,

Literaturverzeichnis

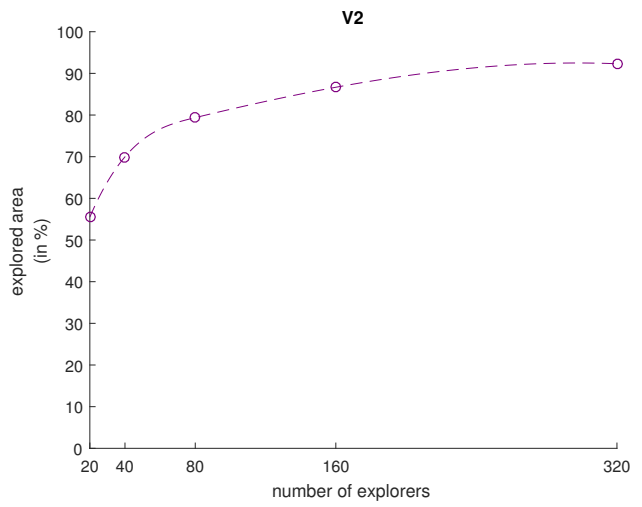
- [SSA13] Shailendra S. Aote, Dr. Latesh M. Dr. M M Raghuwanshi R. Dr. M M Raghuwanshi: A Brief Review on Particle Swarm Optimization: Limitation and Future Directions. In: *International Journal of Computer Science Engineering (IJCSE)* (2013)
- [The16] Theisel, Holger: *Obtaining Flow Data*. [http://www.isg.cs.uni-magdeburg.de/visual/files/Summer%20term%202016/Flow%20Visualization%20\(FlowVis\)/L_03_Obtaining%20Flow%20Data.pdf](http://www.isg.cs.uni-magdeburg.de/visual/files/Summer%20term%202016/Flow%20Visualization%20(FlowVis)/L_03_Obtaining%20Flow%20Data.pdf), 2016
- [Tia13] Tian, Dong ping: A Review of Convergence Analysis of Particle Swarm Optimization. In: *International Journal of Grid and Distributed Computing* (2013)
- [WJ09] W. Jatmiko, R. E. A. Nugraha N. A. Nugraha: Localizing Multiple Odor Sources in a Dynamic Environment Based on Modified Niche Particle Swarm Optimization with Flow of Wind. In: *WSEAS TRANSACTION on SYSTEMS* (2009). – Authors: W. Jatmiko, A. Nugraha, R. Effendi, W. Pambuko, R. Mardian, K. Sekiyama, T. Fukuda
- [YZL16] Yong-Zai Lu, Min-Rong C. Yu-Wang Chen C. Yu-Wang Chen: *Extremal Optimization: Fundamentals, Algorithms, and Applications*. Chemical Industry Press, 2016
- [Zha13] Zhao, Kai: Path Planning in Unknown Environment for Mobile Robots Based on Improved Bayes and PSO. In: *Information Technology Journal* (2013)

A Erkundungsraten

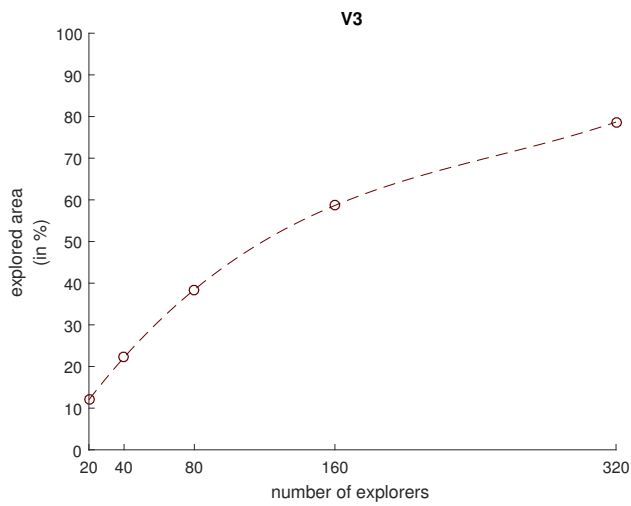
A Erkundungsraten



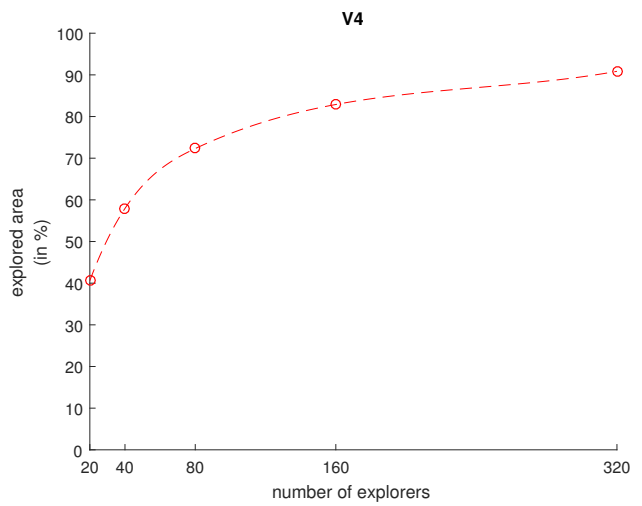
(a) Vektorfeld "Cross"



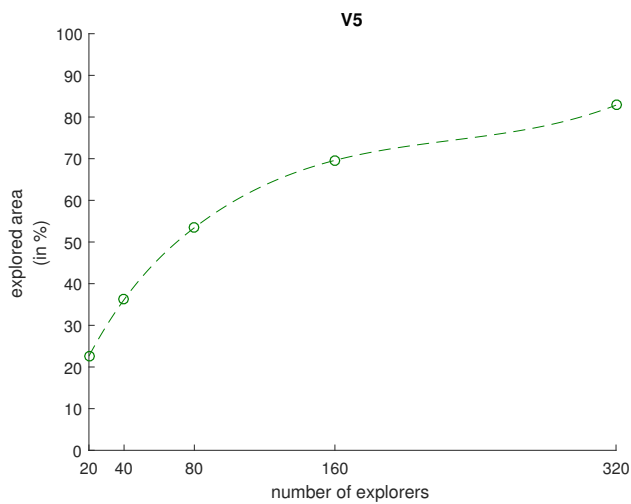
(b) Vektorfeld "Rotation"



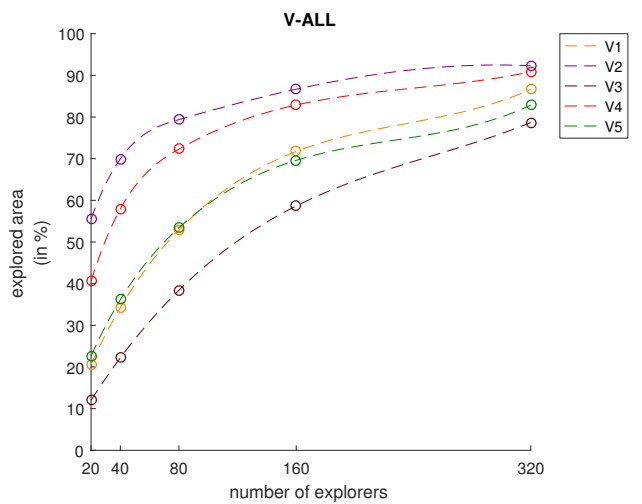
(c) Vektorfeld "Sheared"



(d) Vektorfeld "Wave"



(e) Vektorfeld "Tornado"

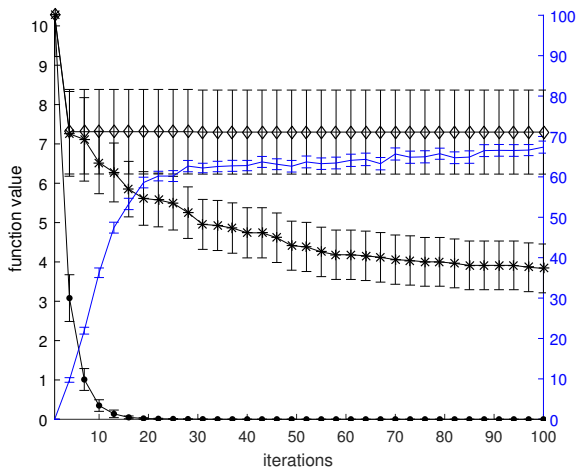


(f) Übersicht aller Erfolgsraten für die Vektorfelder

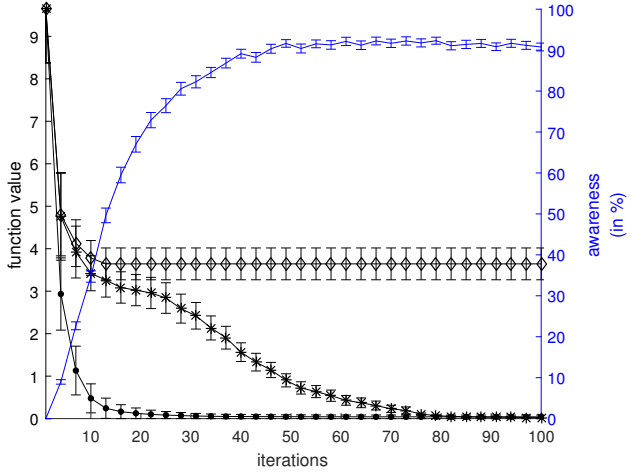
Abbildung A.1: Erkundungsraten der verschiedenen Vektorfelder

B Fehler-Plots

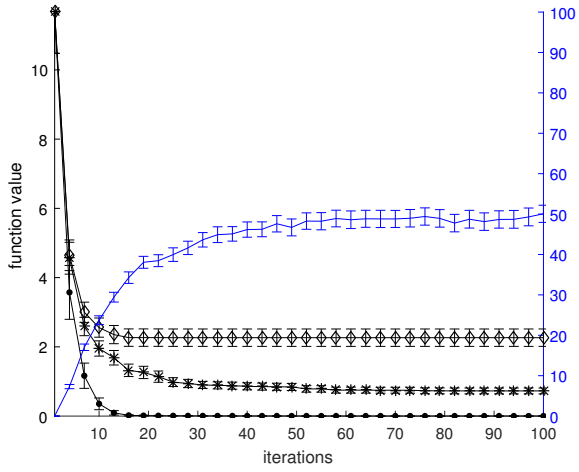
B Fehler-Plots



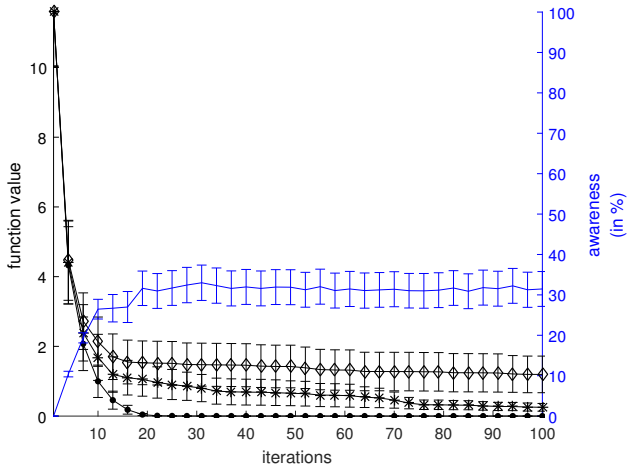
(a) $F_1, V_1, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



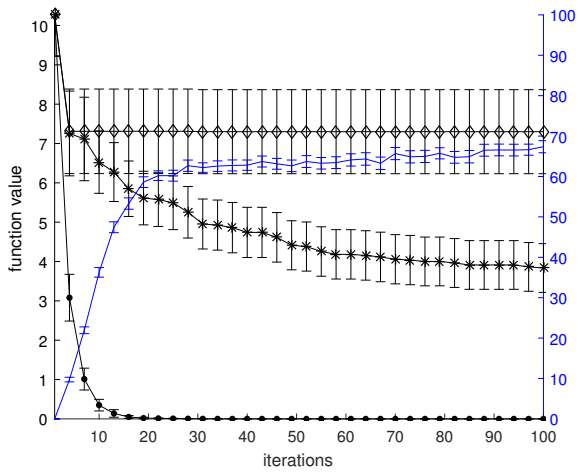
(b) $F_1, V_2, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



(c) $F_1, V_3, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



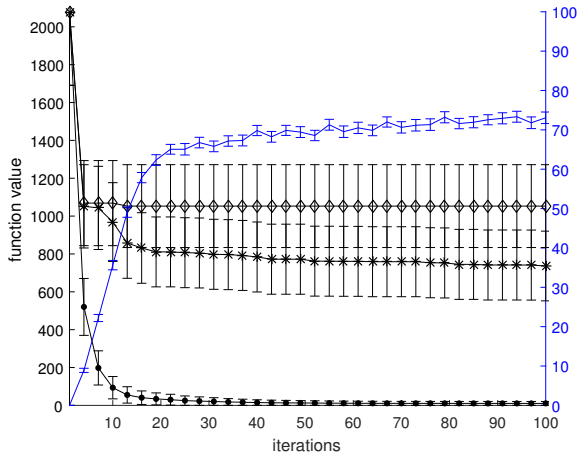
(d) $F_1, V_4, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



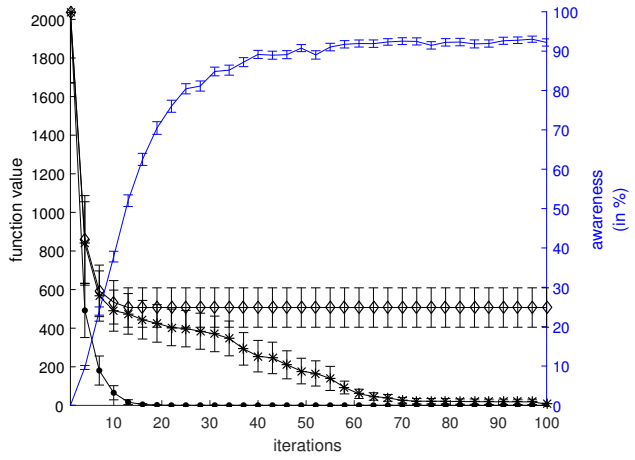
(e) $F_1, V_5, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$

Abbildung B.1: Fehler-Plots einer durchgeführten Simulation für die sphärische Testfunktion

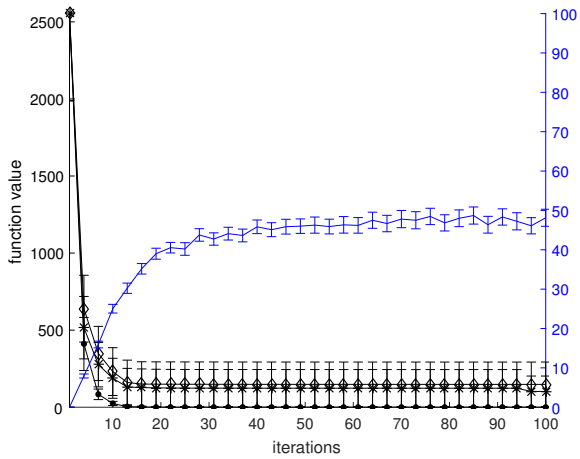
B Fehler-Plots



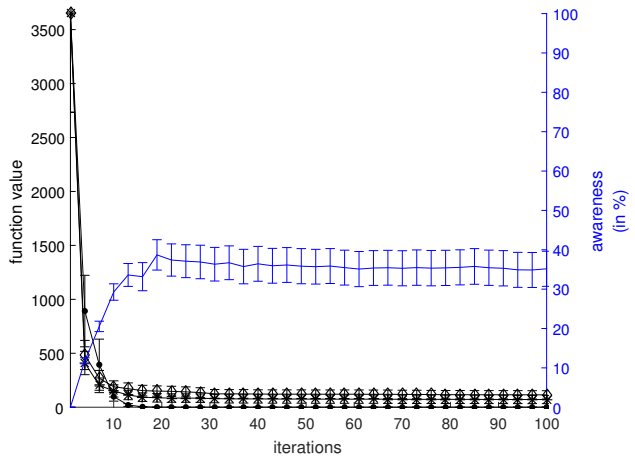
(a) $F_2, V_1, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



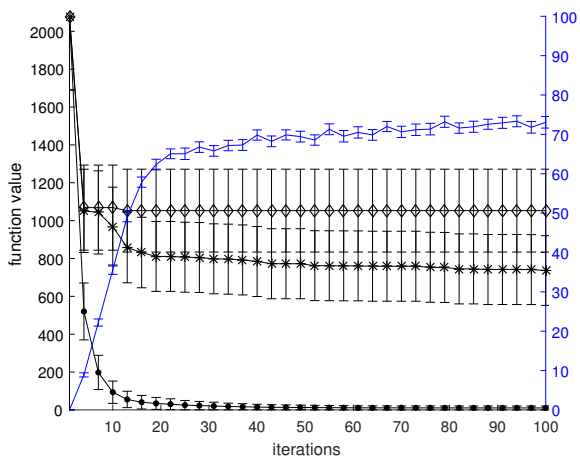
(b) $F_2, V_2, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



(c) $F_2, V_3, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



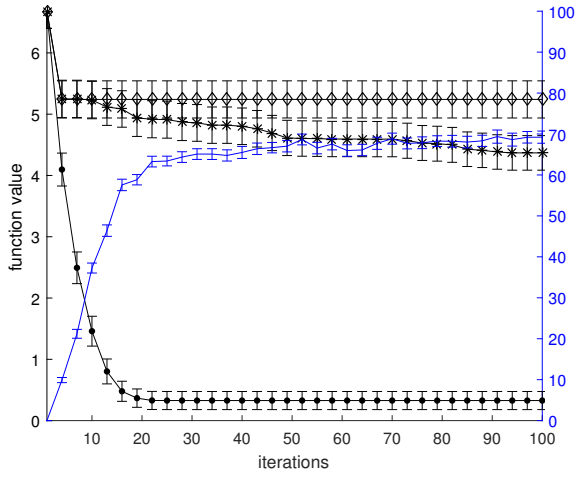
(d) $F_2, V_4, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



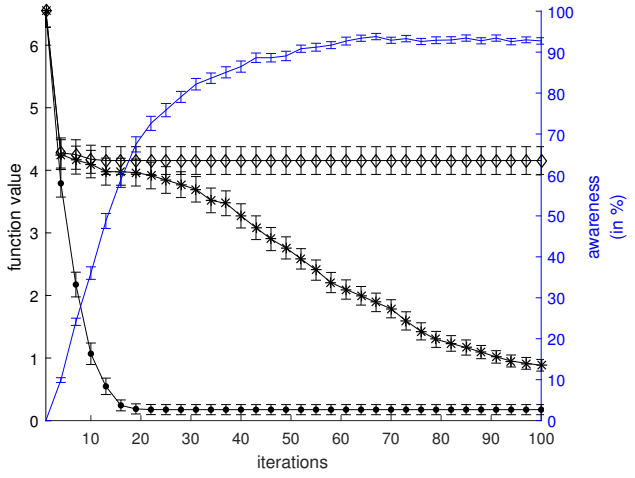
(e) $F_2, V_5, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$

Abbildung B.2: Fehler-Plots einer durchgeführten Simulation für die Rosenbrock-Testfunktion

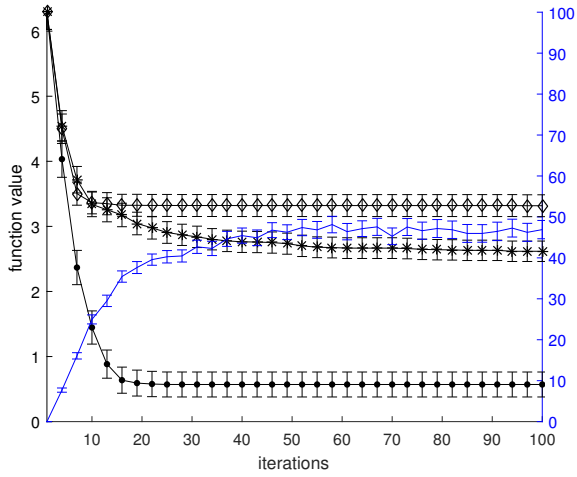
B Fehler-Plots



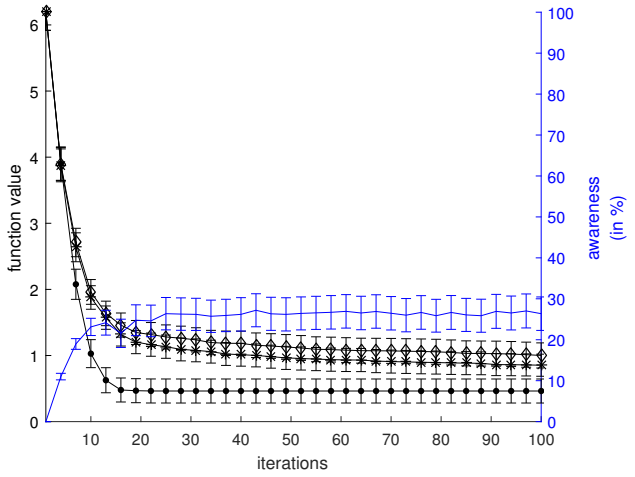
(a) $F_3, V_1, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



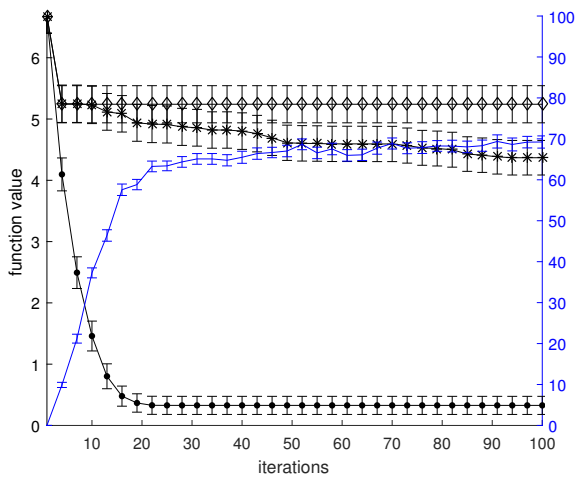
(b) $F_3, V_2, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



(c) $F_3, V_3, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



(d) $F_3, V_4, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$



(e) $F_3, V_5, N_{opt} = 30, N_{expl} = 20, \omega = 0,6$

Abbildung B.3: Fehler-Plots einer durchgeführten Simulation für die Ackley-Testfunktion

C Erfolgsraten

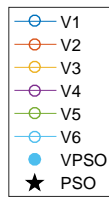
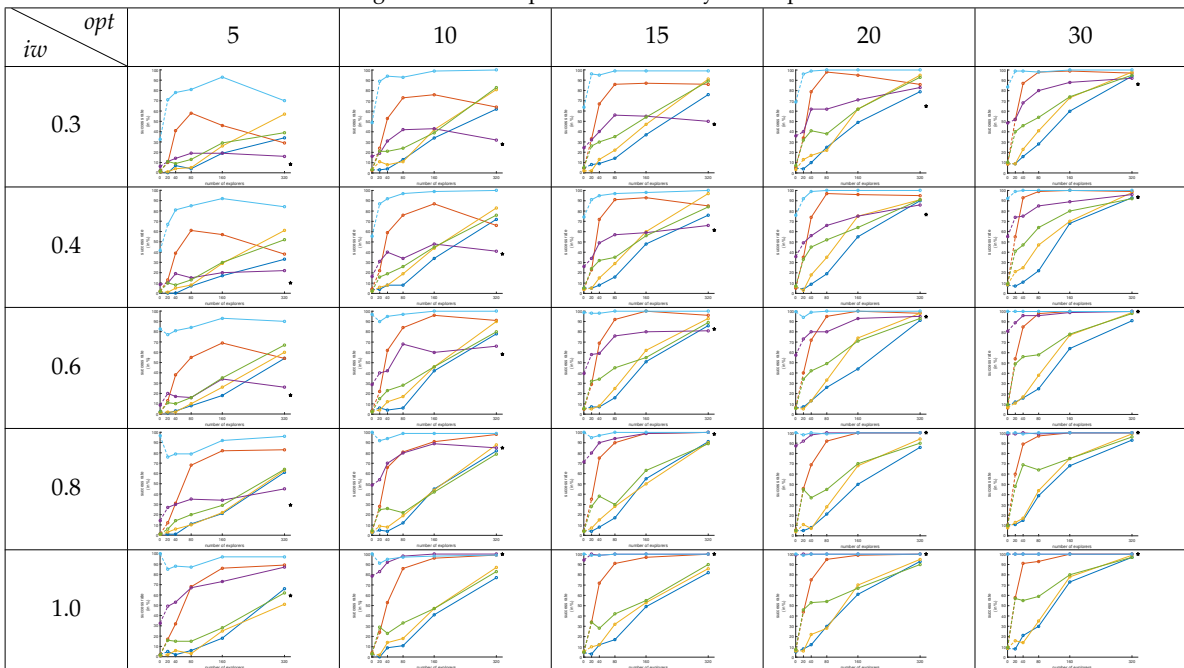


Abbildung C.1: Legende für die Tabellen B.1 - B.3

Tabelle C.1: Erfolgsrate für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion



C Erfolgsraten

Tabelle C.2: Erfolgsrate für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion

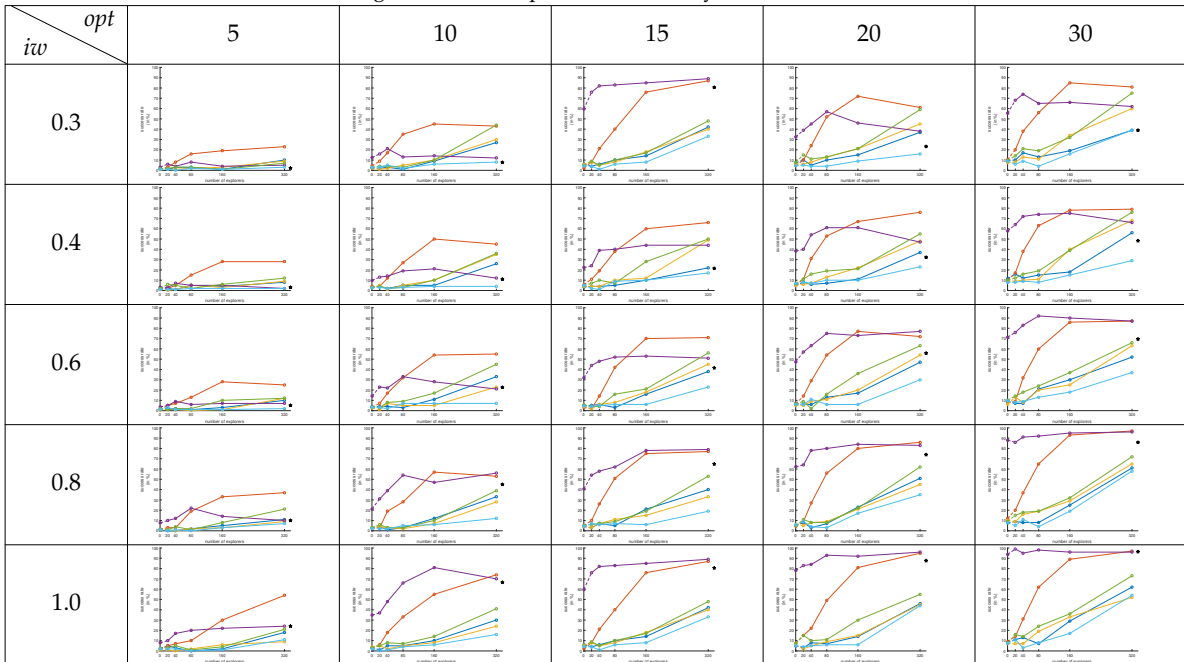
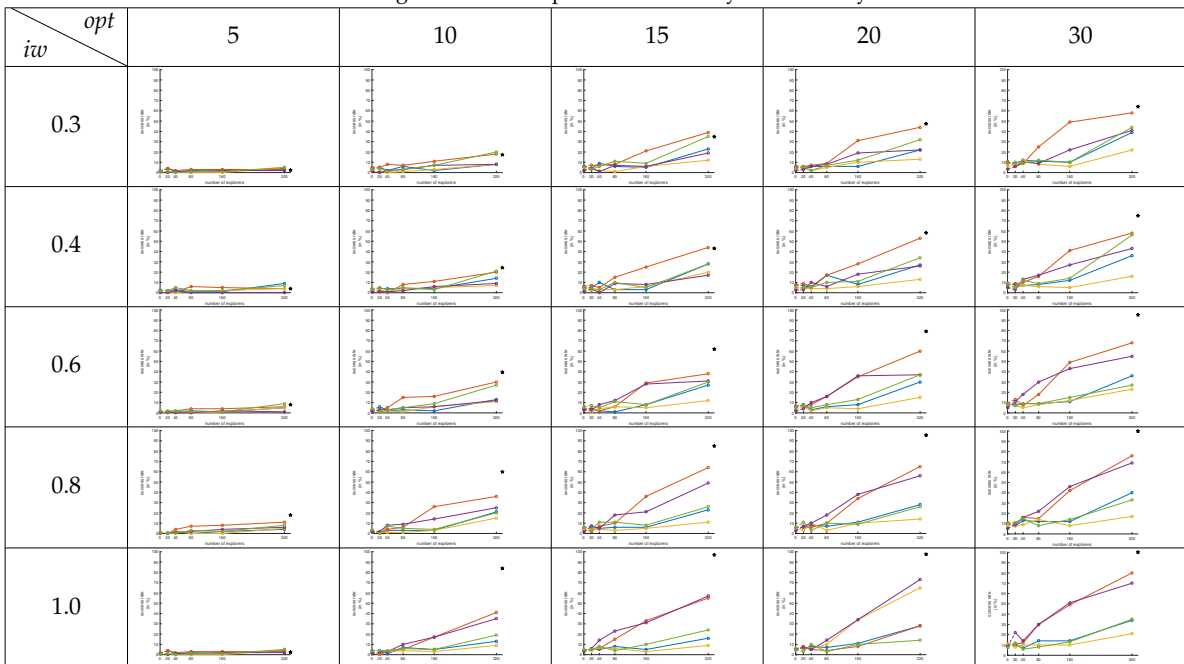


Tabelle C.3: Erfolgsrate für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion



D Mittlerer Fehler

Tabelle D.1: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 1

iw	expl		V1						none
			0	20	40	80	160	320	-
0.3	opt	5	58.96 ± 60.40	45.35 ± 49.42	24.72 ± 35.06	10.27 ± 24.59	5.59 ± 17.27	5.68 ± 20.64	43.58 ± 53.73
		10	25.72 ± 36.65	17.28 ± 24.90	10.25 ± 17.29	3.20 ± 9.18	0.34 ± 1.05	0.53 ± 2.45	13.12 ± 26.97
		15	17.52 ± 27.85	12.02 ± 19.84	4.76 ± 8.95	1.64 ± 7.88	0.19 ± 1.07	0.02 ± 0.11	6.51 ± 17.06
		20	13.89 ± 21.67	9.13 ± 17.77	3.63 ± 7.08	0.60 ± 1.34	0.06 ± 0.15	0.01 ± 0.01	3.67 ± 11.76
		30	6.63 ± 9.19	4.08 ± 7.26	2.39 ± 5.61	0.27 ± 0.55	0.04 ± 0.11	0.00 ± 0.01	0.34 ± 1.60
0.4	opt	5	77.43 ± 70.69	52.89 ± 53.36	33.28 ± 40.01	13.62 ± 29.53	5.38 ± 19.18	5.45 ± 20.32	60.20 ± 73.61
		10	28.64 ± 32.63	20.43 ± 26.38	6.52 ± 13.57	4.54 ± 14.97	0.18 ± 0.77	0.45 ± 3.65	12.11 ± 23.44
		15	16.23 ± 22.77	12.44 ± 19.19	3.25 ± 6.98	0.79 ± 1.75	0.13 ± 0.47	0.01 ± 0.02	3.35 ± 8.48
		20	14.51 ± 25.00	7.54 ± 14.54	3.07 ± 6.95	0.68 ± 1.47	0.07 ± 0.29	0.00 ± 0.01	3.15 ± 10.49
		30	6.74 ± 9.51	3.79 ± 7.29	1.46 ± 2.85	0.33 ± 0.80	0.03 ± 0.09	0.00 ± 0.01	0.12 ± 0.43
0.6	opt	5	63.04 ± 71.86	40.40 ± 45.31	32.12 ± 42.74	10.01 ± 25.60	5.78 ± 24.72	6.02 ± 30.06	39.86 ± 62.91
		10	29.46 ± 35.84	22.85 ± 32.25	10.55 ± 18.42	1.75 ± 3.63	0.13 ± 0.32	0.01 ± 0.04	7.81 ± 19.06
		15	22.27 ± 29.63	11.71 ± 18.40	9.33 ± 20.72	1.48 ± 6.76	0.36 ± 3.01	0.01 ± 0.03	1.89 ± 6.51
		20	9.32 ± 13.59	6.71 ± 11.27	2.45 ± 4.87	0.43 ± 1.26	0.09 ± 0.45	0.01 ± 0.04	0.02 ± 0.14
		30	7.10 ± 11.13	4.91 ± 9.64	1.22 ± 2.15	0.18 ± 0.40	0.04 ± 0.16	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.01
0.8	opt	5	57.68 ± 59.87	43.53 ± 44.26	30.00 ± 38.76	7.96 ± 20.98	2.50 ± 12.91	0.71 ± 6.22	23.72 ± 42.89
		10	33.59 ± 41.74	20.17 ± 31.19	7.51 ± 18.80	1.98 ± 6.19	0.45 ± 3.26	0.01 ± 0.04	1.24 ± 5.09
		15	20.17 ± 25.98	12.94 ± 18.76	5.69 ± 12.65	1.10 ± 5.21	0.06 ± 0.16	0.00 ± 0.01	0.01 ± 0.11
		20	10.61 ± 16.02	6.54 ± 12.44	3.47 ± 9.42	0.45 ± 1.54	0.06 ± 0.30	0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.00
		30	7.59 ± 10.78	5.13 ± 9.19	1.35 ± 3.39	0.17 ± 0.61	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00
1.0	opt	5	61.50 ± 64.11	41.32 ± 47.94	32.16 ± 38.60	6.79 ± 15.88	0.29 ± 0.90	0.05 ± 0.15	11.13 ± 34.28
		10	30.53 ± 35.12	18.68 ± 25.59	7.82 ± 18.13	1.36 ± 4.55	0.11 ± 0.49	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00
		15	14.46 ± 21.04	7.94 ± 13.70	3.09 ± 7.86	0.40 ± 1.01	0.03 ± 0.06	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00
		20	9.59 ± 12.95	4.53 ± 7.93	3.11 ± 7.14	0.23 ± 0.71	0.02 ± 0.03	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00
		30	6.69 ± 9.27	3.23 ± 4.96	1.47 ± 4.27	0.15 ± 0.34	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00

Tabelle D.2: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 2

iw	expl		V2						none
			0	20	40	80	160	320	-
0.3	opt	5	23.25 ± 24.23	3.33 ± 8.90	0.98 ± 6.10	1.32 ± 5.22	4.59 ± 16.37	7.15 ± 13.61	51.52 ± 67.16
		10	10.08 ± 10.23	1.03 ± 3.54	0.06 ± 0.21	0.17 ± 0.68	0.24 ± 0.82	1.35 ± 4.55	10.87 ± 21.27
		15	9.05 ± 8.50	0.35 ± 1.46	0.02 ± 0.04	0.02 ± 0.12	0.39 ± 2.15	0.38 ± 1.63	6.91 ± 14.57
		20	5.79 ± 6.07	0.30 ± 1.10	0.02 ± 0.04	0.00 ± 0.00	0.01 ± 0.06	0.25 ± 1.25	2.07 ± 5.65
		30	3.99 ± 3.87	0.03 ± 0.07	0.03 ± 0.25	0.00 ± 0.00	0.02 ± 0.18	0.01 ± 0.09	0.47 ± 2.23
0.4	opt	5	18.62 ± 19.39	3.02 ± 8.99	0.61 ± 3.22	0.42 ± 1.53	3.53 ± 15.13	9.59 ± 21.44	50.91 ± 75.43
		10	12.06 ± 11.88	1.24 ± 3.93	0.08 ± 0.48	0.03 ± 0.15	0.25 ± 1.34	1.31 ± 3.73	9.23 ± 18.27
		15	7.28 ± 7.50	0.37 ± 1.49	0.05 ± 0.33	0.06 ± 0.42	0.03 ± 0.12	0.38 ± 2.16	3.56 ± 9.79
		20	5.34 ± 5.24	0.16 ± 0.73	0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.10 ± 1.01	0.02 ± 0.14	0.71 ± 2.93
		30	3.61 ± 3.90	0.03 ± 0.07	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.02	0.22 ± 5.09
0.6	opt	5	19.21 ± 18.72	2.76 ± 9.49	0.08 ± 0.21	0.52 ± 2.58	0.67 ± 2.33	3.09 ± 9.62	38.56 ± 61.93
		10	10.69 ± 11.31	0.33 ± 1.05	0.02 ± 0.03	0.06 ± 0.42	0.04 ± 0.30	0.08 ± 0.59	7.61 ± 20.29
		15	7.53 ± 7.26	0.20 ± 0.92	0.01 ± 0.02	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.00	0.01 ± 0.08	1.63 ± 7.16
		20	5.73 ± 5.70	0.09 ± 0.36	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.07 ± 0.69	0.27 ± 2.01
		30	3.69 ± 3.77	0.03 ± 0.08	0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
0.8	opt	5	19.27 ± 21.29	1.52 ± 5.45	0.16 ± 1.10	0.11 ± 0.93	0.12 ± 0.66	0.97 ± 7.32	36.33 ± 63.90
		10	10.76 ± 10.99	0.59 ± 2.80	0.01 ± 0.03	0.01 ± 0.01	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.00	2.57 ± 13.73
		15	7.22 ± 7.81	0.07 ± 0.15	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.01 ± 0.10
		20	5.39 ± 6.74	0.04 ± 0.10	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		30	3.86 ± 3.77	0.02 ± 0.04	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
1.0	opt	5	21.25 ± 23.99	0.98 ± 3.21	0.06 ± 0.08	0.01 ± 0.03	0.29 ± 2.82	0.90 ± 8.64	9.40 ± 28.50
		10	13.15 ± 11.82	0.21 ± 1.11	0.02 ± 0.04	0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.02	0.00 ± 0.01
		15	7.33 ± 6.47	0.11 ± 0.40	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		20	5.09 ± 5.76	0.04 ± 0.10	0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		30	2.87 ± 3.19	0.02 ± 0.04	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.3: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 3

iw		expl	V3						none
			0	20	40	80	160	320	-
0.3	opt	5	48.92 ± 86.75	32.73 ± 70.03	31.14 ± 69.73	21.92 ± 68.05	33.60 ± 80.61	8.55 ± 36.56	51.52 ± 67.16
		10	6.52 ± 13.33	3.24 ± 12.68	5.63 ± 23.30	0.33 ± 0.53	1.70 ± 16.31	0.01 ± 0.05	10.87 ± 21.27
		15	6.47 ± 16.06	3.25 ± 15.60	1.85 ± 9.96	0.19 ± 0.36	0.03 ± 0.05	0.00 ± 0.01	6.91 ± 14.57
		20	3.48 ± 2.90	1.24 ± 1.72	0.49 ± 1.06	0.15 ± 0.28	0.02 ± 0.04	0.00 ± 0.01	2.07 ± 5.65
		30	2.34 ± 2.41	0.96 ± 1.28	0.44 ± 0.74	0.09 ± 0.20	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.00	0.47 ± 2.23
0.4	opt	5	47.98 ± 95.05	38.01 ± 79.38	39.45 ± 82.68	19.90 ± 54.90	13.47 ± 51.90	10.57 ± 41.11	50.91 ± 75.43
		10	6.44 ± 12.07	4.02 ± 10.26	3.07 ± 18.40	4.31 ± 27.86	0.06 ± 0.13	0.01 ± 0.03	9.23 ± 18.27
		15	4.33 ± 3.48	1.67 ± 2.25	0.67 ± 1.29	0.17 ± 0.46	0.03 ± 0.06	0.00 ± 0.01	3.56 ± 9.79
		20	3.79 ± 3.21	1.39 ± 2.03	0.52 ± 0.93	0.11 ± 0.22	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.01	0.71 ± 2.93
		30	1.65 ± 1.77	0.77 ± 1.30	0.34 ± 0.56	0.08 ± 0.20	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.00	0.22 ± 0.99
0.6	opt	5	43.93 ± 83.85	37.37 ± 76.86	34.39 ± 72.86	28.83 ± 77.59	15.46 ± 56.27	3.40 ± 18.06	38.56 ± 61.93
		10	16.30 ± 40.93	12.49 ± 36.35	6.82 ± 30.77	4.42 ± 28.87	1.83 ± 17.79	0.01 ± 0.01	7.61 ± 20.29
		15	5.11 ± 10.32	2.02 ± 2.84	0.54 ± 0.83	0.15 ± 0.32	0.02 ± 0.07	0.00 ± 0.01	1.63 ± 7.16
		20	2.89 ± 2.88	1.16 ± 1.60	0.51 ± 0.71	0.11 ± 0.28	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00	0.27 ± 2.01
		30	2.29 ± 2.75	0.97 ± 1.50	0.35 ± 0.53	0.11 ± 0.26	0.01 ± 0.04	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
0.8	opt	5	62.17 ± 101.46	46.06 ± 85.62	35.60 ± 78.39	30.04 ± 78.78	15.50 ± 61.46	5.11 ± 36.12	36.33 ± 63.90
		10	15.86 ± 46.65	9.37 ± 39.99	6.26 ± 34.00	0.36 ± 0.65	0.04 ± 0.10	0.00 ± 0.01	2.57 ± 13.73
		15	6.21 ± 24.10	4.38 ± 24.22	0.64 ± 0.90	0.17 ± 0.37	0.03 ± 0.05	0.00 ± 0.01	0.01 ± 0.10
		20	4.02 ± 10.07	0.86 ± 1.08	0.67 ± 0.91	0.11 ± 0.20	0.02 ± 0.03	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00
		30	2.21 ± 2.61	0.74 ± 1.03	0.32 ± 0.42	0.15 ± 0.54	0.01 ± 0.03	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
1.0	opt	5	63.43 ± 101.04	51.43 ± 93.48	34.58 ± 85.30	28.90 ± 75.06	21.06 ± 67.01	4.80 ± 33.77	9.40 ± 28.50
		10	19.23 ± 50.60	12.79 ± 42.80	1.12 ± 1.77	0.31 ± 0.59	0.03 ± 0.06	0.01 ± 0.04	0.00 ± 0.01
		15	6.54 ± 19.21	3.76 ± 15.52	2.40 ± 16.82	0.20 ± 0.44	0.02 ± 0.04	0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.00
		20	3.15 ± 2.90	1.36 ± 2.07	0.44 ± 0.67	0.10 ± 0.19	0.02 ± 0.06	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		30	1.67 ± 1.73	0.75 ± 0.95	0.34 ± 0.60	0.09 ± 0.15	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00

Tabelle D.4: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 4

iw		expl	V4						none
			0	20	40	80	160	320	-
0.3	opt	5	45.60 ± 57.65	31.88 ± 38.01	22.24 ± 35.32	37.52 ± 47.05	49.05 ± 58.08	40.62 ± 60.51	60.36 ± 68.20
		10	13.23 ± 23.41	9.98 ± 17.86	8.29 ± 16.33	5.92 ± 11.69	8.48 ± 22.14	12.44 ± 23.07	12.86 ± 26.14
		15	8.70 ± 16.79	7.34 ± 16.21	3.82 ± 11.40	5.85 ± 15.49	5.29 ± 13.56	6.95 ± 17.08	6.88 ± 14.35
		20	3.53 ± 7.69	2.08 ± 4.64	1.33 ± 3.10	1.87 ± 7.08	0.92 ± 5.61	1.11 ± 4.46	2.17 ± 5.57
		30	0.99 ± 2.97	0.53 ± 1.27	0.66 ± 3.18	0.27 ± 1.16	0.17 ± 0.95	0.04 ± 0.17	0.21 ± 0.81
0.4	opt	5	40.22 ± 46.47	31.00 ± 36.97	29.29 ± 40.93	34.52 ± 54.27	33.68 ± 50.72	37.05 ± 64.62	48.62 ± 49.86
		10	9.61 ± 19.87	7.02 ± 14.94	9.00 ± 16.48	10.35 ± 18.70	10.53 ± 24.84	8.55 ± 19.21	8.84 ± 18.67
		15	4.82 ± 12.43	3.19 ± 9.09	2.90 ± 7.80	3.74 ± 9.78	3.86 ± 9.52	3.16 ± 9.93	4.10 ± 15.48
		20	2.86 ± 7.45	1.46 ± 4.85	0.93 ± 3.03	1.01 ± 4.49	1.30 ± 4.84	0.91 ± 5.27	1.11 ± 4.35
		30	0.78 ± 1.95	0.50 ± 1.96	0.29 ± 1.19	0.08 ± 0.25	0.56 ± 3.04	0.07 ± 0.45	0.07 ± 0.40
0.6	opt	5	38.48 ± 61.73	25.19 ± 34.91	28.04 ± 39.79	31.05 ± 41.55	21.15 ± 34.59	24.58 ± 44.89	38.97 ± 59.99
		10	13.30 ± 31.52	6.97 ± 14.86	7.49 ± 15.17	2.12 ± 9.56	3.92 ± 10.28	1.94 ± 5.54	9.21 ± 26.15
		15	3.85 ± 9.75	2.27 ± 5.98	1.42 ± 5.23	1.11 ± 3.68	1.04 ± 5.37	0.83 ± 3.69	2.01 ± 8.60
		20	1.01 ± 4.07	0.38 ± 1.69	0.32 ± 1.72	0.12 ± 0.33	0.07 ± 0.53	0.07 ± 0.42	0.03 ± 0.20
		30	0.25 ± 0.83	0.11 ± 0.44	0.04 ± 0.33	0.01 ± 0.08	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
0.8	opt	5	32.89 ± 56.41	20.28 ± 33.48	20.74 ± 34.55	17.22 ± 36.77	20.62 ± 41.06	24.29 ± 50.95	27.90 ± 50.80
		10	9.61 ± 21.08	3.89 ± 10.91	2.60 ± 9.22	1.14 ± 6.36	0.16 ± 0.86	1.14 ± 5.00	0.74 ± 3.64
		15	1.89 ± 9.30	1.58 ± 6.96	0.56 ± 4.49	0.04 ± 0.25	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.01
		20	0.48 ± 2.44	0.75 ± 6.27	0.01 ± 0.08	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		30	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
1.0	opt	5	26.93 ± 57.49	9.96 ± 21.54	4.56 ± 12.15	1.30 ± 5.06	3.96 ± 17.22	1.60 ± 9.51	11.36 ± 40.81
		10	1.24 ± 4.25	0.43 ± 1.53	0.16 ± 0.80	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		15	0.24 ± 1.90	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		20	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
		30	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.5: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der sphärischen Funktion im Vektorfeld 5

		V5						none
		0	20	40	80	160	320	-
iw	expl							
	opt							
0.3	5	20.38 ± 23.08	1.82 ± 3.87	2.12 ± 4.89	2.56 ± 6.44	2.53 ± 8.55	10.69 ± 37.41	61.43 ± 90.89
	10	12.49 ± 13.96	0.73 ± 1.65	0.66 ± 3.17	0.50 ± 1.68	0.45 ± 1.38	0.06 ± 0.25	15.04 ± 23.72
	15	6.13 ± 6.53	0.33 ± 0.61	0.45 ± 2.13	0.33 ± 1.37	0.07 ± 0.23	0.02 ± 0.09	6.69 ± 15.18
	20	4.54 ± 4.75	0.30 ± 0.71	0.32 ± 1.23	0.09 ± 0.23	0.04 ± 0.11	0.00 ± 0.01	3.42 ± 9.24
0.4	5	24.63 ± 27.11	2.97 ± 11.27	2.53 ± 7.66	2.01 ± 6.48	1.42 ± 3.34	3.18 ± 14.56	56.73 ± 79.31
	10	11.04 ± 15.08	0.86 ± 2.67	0.94 ± 3.22	0.92 ± 4.52	0.28 ± 1.74	0.08 ± 0.36	12.57 ± 23.05
	15	6.10 ± 7.89	0.58 ± 1.43	0.35 ± 0.89	0.56 ± 4.04	0.05 ± 0.12	0.01 ± 0.04	3.19 ± 12.22
	20	4.38 ± 4.69	0.45 ± 1.18	0.12 ± 0.28	0.09 ± 0.25	0.04 ± 0.12	0.01 ± 0.02	1.09 ± 3.62
0.6	5	22.85 ± 25.01	2.63 ± 6.59	1.38 ± 3.22	2.31 ± 6.98	2.58 ± 17.38	0.14 ± 0.59	35.28 ± 50.42
	10	13.15 ± 17.48	0.53 ± 1.32	0.21 ± 0.44	0.57 ± 2.57	0.30 ± 1.18	0.03 ± 0.14	9.70 ± 22.72
	15	7.39 ± 8.98	0.40 ± 1.26	0.20 ± 0.68	0.18 ± 0.69	0.20 ± 1.46	0.01 ± 0.02	1.31 ± 5.34
	20	4.46 ± 5.10	0.19 ± 0.39	0.07 ± 0.17	0.08 ± 0.49	0.02 ± 0.04	0.00 ± 0.02	0.15 ± 1.02
0.8	5	21.15 ± 20.39	1.25 ± 2.98	2.42 ± 7.96	1.39 ± 3.46	1.07 ± 4.26	1.19 ± 11.32	23.40 ± 38.35
	10	9.25 ± 11.12	0.51 ± 1.40	0.23 ± 0.62	0.35 ± 1.66	0.21 ± 1.06	0.03 ± 0.13	2.02 ± 9.94
	15	5.63 ± 6.53	0.42 ± 1.46	0.26 ± 0.89	0.09 ± 0.18	0.02 ± 0.05	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.03
	20	4.35 ± 5.63	0.39 ± 1.24	0.09 ± 0.27	0.04 ± 0.09	0.02 ± 0.06	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00
1.0	5	2.89 ± 4.20	0.25 ± 0.66	0.04 ± 0.20	0.03 ± 0.10	0.02 ± 0.09	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
	10	19.75 ± 22.85	1.22 ± 2.73	1.46 ± 8.79	1.08 ± 4.63	0.48 ± 1.75	0.05 ± 0.15	5.90 ± 17.01
	15	11.80 ± 13.00	0.60 ± 1.97	0.11 ± 0.22	0.19 ± 0.44	0.06 ± 0.14	0.02 ± 0.11	0.00 ± 0.00
	20	5.70 ± 5.77	0.49 ± 1.33	0.26 ± 1.08	0.05 ± 0.16	0.07 ± 0.31	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.00
1.0	5	4.34 ± 6.21	0.24 ± 0.63	0.07 ± 0.22	0.10 ± 0.48	0.02 ± 0.05	0.00 ± 0.02	0.00 ± 0.00
	10	2.22 ± 3.25	0.15 ± 0.48	0.07 ± 0.26	0.02 ± 0.03	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00
	15							
	20							

Tabelle D.6: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 1

		V1						none
		0	20	40	80	160	320	-
iw	expl							
	opt							
0.3	5	24947.43 ± 98864.10	21209.45 ± 98915.85	17305.37 ± 99171.29	34364.93 ± 170030.45	62023.16 ± 237154.17	10465.73 ± 99476.47	38167.08 ± 149433.62
	10	6108.95 ± 8665.10	3988.77 ± 6338.94	3088.07 ± 5352.75	1388.30 ± 4039.76	127.09 ± 839.52	10001.97 ± 99498.55	2679.71 ± 6260.63
	15	5442.99 ± 7769.59	3952.71 ± 5897.78	1485.06 ± 3485.10	434.61 ± 1730.28	22.87 ± 95.34	1.16 ± 8.08	1533.02 ± 4461.54
	20	2390.66 ± 5091.97	1803.62 ± 3761.30	909.03 ± 2758.88	248.04 ± 1170.24	33.11 ± 196.92	0.24 ± 0.49	382.28 ± 1221.28
0.4	5	1301.36 ± 3440.96	1009.26 ± 2914.78	357.39 ± 975.18	55.63 ± 196.79	1.13 ± 6.97	0.12 ± 0.20	81.73 ± 329.16
	10	46063.87 ± 169345.55	52629.64 ± 194633.15	23547.76 ± 112910.78	13480.01 ± 99385.84	12206.54 ± 99631.55	21191.27 ± 140000.09	87419.44 ± 246781.95
	15	6723.35 ± 8653.08	4545.44 ± 6229.49	13321.69 ± 99358.27	682.49 ± 1898.67	76.30 ± 464.31	0.78 ± 4.07	1602.71 ± 3325.24
	20	4562.68 ± 7481.54	3306.04 ± 6272.43	1685.77 ± 3956.88	405.97 ± 1738.57	8.06 ± 37.07	0.25 ± 0.43	540.27 ± 1433.91
0.6	5	14493.93 ± 14085.41	10739.49 ± 10875.52	29447.56 ± 139302.39	34221.52 ± 157864.15	27138.92 ± 153549.21	10092.76 ± 99493.64	41142.45 ± 172693.73
	10	9512.97 ± 22503.69	5760.36 ± 7852.11	3581.05 ± 6426.34	884.63 ± 2918.90	62.39 ± 419.68	0.37 ± 0.74	917.27 ± 2440.06
	15	5411.97 ± 8022.15	4213.92 ± 6497.59	1216.28 ± 3509.65	214.19 ± 900.72	17.84 ± 159.55	0.23 ± 0.46	370.43 ± 1999.25
	20	3169.75 ± 5792.33	1992.50 ± 4151.30	1063.57 ± 2964.43	194.86 ± 772.50	5.25 ± 44.24	0.15 ± 0.46	70.71 ± 419.35
0.8	5	1265.06 ± 2883.02	868.33 ± 2257.64	299.42 ± 898.45	92.93 ± 528.01	2.98 ± 21.67	0.13 ± 0.37	0.16 ± 0.47
	10	25867.79 ± 99053.72	21647.95 ± 99012.40	9290.83 ± 11139.74	13002.92 ± 99508.56	20529.53 ± 140006.50	10589.16 ± 99589.96	64734.89 ± 236482.29
	15	6776.39 ± 9736.00	4745.29 ± 7461.94	2823.23 ± 5258.31	860.34 ± 3007.60	11.50 ± 79.88	0.17 ± 0.31	10294.50 ± 99495.12
	20	3701.83 ± 6650.59	2652.02 ± 5619.06	1234.47 ± 3358.80	342.55 ± 1530.96	36.96 ± 285.67	0.13 ± 0.33	0.33 ± 0.78
1.0	5	3042.06 ± 5995.91	1575.59 ± 3301.86	861.77 ± 2392.68	54.36 ± 232.65	10.20 ± 70.26	0.08 ± 0.24	0.20 ± 0.47
	10	1046.71 ± 2826.80	595.33 ± 1570.19	344.90 ± 1363.73	59.96 ± 304.06	0.28 ± 0.77	0.03 ± 0.06	0.07 ± 0.32
	15	31565.22 ± 104602.95	26096.05 ± 104756.75	26258.99 ± 139366.31	24150.45 ± 134174.11	30090.14 ± 170571.83	10963.93 ± 99630.71	21933.97 ± 139821.29
	20	8988.80 ± 10615.59	5271.13 ± 6700.08	2898.10 ± 5453.77	296.47 ± 900.37	6.88 ± 42.23	0.23 ± 0.44	0.33 ± 0.86
1.0	5	4284.44 ± 6189.39	2697.41 ± 4689.07	1387.54 ± 3157.45	462.80 ± 2188.73	5.71 ± 31.19	0.10 ± 0.32	0.15 ± 0.40
	10	2181.09 ± 4422.56	1267.01 ± 3312.08	816.37 ± 1989.63	70.84 ± 261.29	0.38 ± 1.46	0.08 ± 0.15	0.10 ± 0.29
	15	775.07 ± 2127.79	491.61 ± 1769.84	458.96 ± 1533.45	7.27 ± 41.51	0.10 ± 0.16	0.02 ± 0.06	0.02 ± 0.10
	20							

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.7: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 2

		V2						none
iw	opt	expl						
		0	20	40	80	160	320	-
0.3	5	11714.94 ± 28482.11	2908.01 ± 13826.49	89.87 ± 806.54	10019.81 ± 99496.81	10174.88 ± 99486.75	20641.92 ± 139943.44	109070.41 ± 260839.96
	10	3706.39 ± 5492.76	214.76 ± 706.65	0.58 ± 3.86	2.15 ± 14.12	3.36 ± 25.94	25.48 ± 100.21	2551.53 ± 5145.87
	15	2513.77 ± 4068.64	147.72 ± 702.00	1.70 ± 15.14	0.10 ± 0.40	0.22 ± 1.17	15.31 ± 66.81	1128.19 ± 3025.24
	20	1290.17 ± 1750.29	26.55 ± 110.68	0.12 ± 0.16	0.21 ± 1.59	0.04 ± 0.10	0.58 ± 4.96	304.72 ± 817.42
	30	482.57 ± 955.27	6.41 ± 29.08	0.26 ± 1.93	0.03 ± 0.07	0.03 ± 0.13	0.08 ± 0.21	66.82 ± 278.21
0.4	5	9984.18 ± 14320.53	799.69 ± 1988.26	7.83 ± 45.97	10005.89 ± 99498.16	53.82 ± 305.44	20480.34 ± 139944.42	74296.55 ± 209739.09
	10	2753.72 ± 3963.88	217.33 ± 1134.67	0.42 ± 1.17	0.12 ± 0.21	0.08 ± 0.17	28.52 ± 137.99	3167.95 ± 17985.30
	15	1607.99 ± 2206.62	55.74 ± 251.26	0.59 ± 3.52	0.07 ± 0.12	0.14 ± 0.57	1.13 ± 10.29	513.97 ± 1564.74
	20	1168.74 ± 1778.73	29.17 ± 217.77	0.11 ± 0.21	0.05 ± 0.11	0.05 ± 0.18	0.34 ± 2.59	158.58 ± 619.59
	30	574.70 ± 920.46	4.80 ± 25.19	0.06 ± 0.11	0.01 ± 0.03	0.03 ± 0.12	0.03 ± 0.09	1.12 ± 4.16
0.6	5	14299.54 ± 29718.29	796.43 ± 3021.93	10000.91 ± 99498.65	41962.24 ± 196529.90	1.65 ± 7.09	20030.78 ± 139995.78	47624.33 ± 182824.57
	10	4784.86 ± 9880.65	208.46 ± 1384.15	0.25 ± 0.57	0.10 ± 0.15	0.11 ± 0.41	0.14 ± 0.30	1740.35 ± 4804.13
	15	1782.78 ± 2541.33	57.18 ± 366.94	0.15 ± 0.19	0.06 ± 0.09	0.03 ± 0.08	0.07 ± 0.19	180.95 ± 1022.97
	20	984.82 ± 2513.60	13.92 ± 102.62	0.09 ± 0.14	0.04 ± 0.06	0.03 ± 0.07	0.10 ± 0.35	9.40 ± 88.98
	30	533.92 ± 876.61	1.20 ± 7.34	0.05 ± 0.08	0.02 ± 0.03	0.01 ± 0.02	0.03 ± 0.11	0.32 ± 0.62
0.8	5	9521.12 ± 17945.50	547.97 ± 2359.51	10001.03 ± 99498.64	10000.20 ± 99498.72	30000.17 ± 170587.19	20000.44 ± 139999.94	46631.20 ± 195424.08
	10	3813.86 ± 5433.58	20.39 ± 166.97	0.29 ± 0.61	0.11 ± 0.17	10000.07 ± 99498.74	0.16 ± 0.35	166.60 ± 843.37
	15	1934.54 ± 3482.07	14.00 ± 124.53	0.09 ± 0.12	0.05 ± 0.11	0.02 ± 0.08	0.04 ± 0.11	0.35 ± 0.80
	20	1138.36 ± 1691.30	18.33 ± 159.00	0.10 ± 0.18	0.03 ± 0.04	0.01 ± 0.02	0.05 ± 0.24	0.15 ± 0.48
	30	613.35 ± 1173.77	1.97 ± 16.48	0.04 ± 0.06	0.02 ± 0.06	0.00 ± 0.01	0.01 ± 0.10	0.21 ± 0.65
1.0	5	11266.22 ± 20663.68	1318.41 ± 6425.85	7.89 ± 62.84	0.35 ± 1.02	10000.15 ± 99498.73	1.98 ± 17.64	35537.19 ± 167647.32
	10	2822.02 ± 4668.32	11.33 ± 76.06	0.23 ± 0.29	0.12 ± 0.24	0.06 ± 0.13	0.07 ± 0.29	10000.44 ± 99498.70
	15	1480.82 ± 2333.30	32.76 ± 223.75	0.12 ± 0.16	0.07 ± 0.11	0.01 ± 0.03	0.03 ± 0.13	0.28 ± 0.80
	20	1010.38 ± 1605.95	0.56 ± 1.56	0.09 ± 0.14	0.04 ± 0.07	0.01 ± 0.03	0.02 ± 0.10	0.08 ± 0.32
	30	797.20 ± 1529.68	0.23 ± 0.35	0.06 ± 0.11	0.02 ± 0.06	0.00 ± 0.01	0.01 ± 0.04	0.04 ± 0.23

Tabelle D.8: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 3

		V3						none
iw	opt	expl						
		0	20	40	80	160	320	-
0.3	5	32177.55 ± 139692.53	30755.05 ± 139714.93	15376.17 ± 62759.64	23669.26 ± 105713.30	37220.85 ± 169790.98	3322.34 ± 17576.02	76366.27 ± 220897.28
	10	2981.72 ± 8420.88	2367.91 ± 7703.60	2826.30 ± 8098.89	1412.15 ± 5353.11	583.45 ± 3919.77	26.20 ± 131.82	3940.16 ± 10801.93
	15	2107.62 ± 6974.24	1650.67 ± 6254.08	226.33 ± 1582.47	257.96 ± 2547.08	225.38 ± 2238.78	0.14 ± 0.40	1029.55 ± 2589.23
	20	803.42 ± 4951.09	405.29 ± 2830.14	198.96 ± 1949.99	1.37 ± 3.12	0.33 ± 0.72	0.09 ± 0.23	373.34 ± 948.71
	30	4.81 ± 4.86	2.73 ± 2.26	1.81 ± 2.12	0.69 ± 1.04	0.19 ± 0.39	0.03 ± 0.07	155.07 ± 978.94
0.4	5	24353.43 ± 100002.29	22991.25 ± 100176.54	33409.24 ± 139121.12	21348.23 ± 103448.45	18241.32 ± 101774.71	3331.08 ± 9371.28	59644.85 ± 196591.39
	10	3277.37 ± 8950.02	3400.61 ± 8868.68	1144.84 ± 6140.04	2533.40 ± 8142.34	617.41 ± 3075.70	377.04 ± 3592.88	12304.96 ± 99453.43
	15	920.42 ± 4603.86	801.39 ± 4578.03	316.03 ± 2197.77	226.67 ± 2238.66	145.91 ± 1447.56	0.10 ± 0.34	553.93 ± 2097.67
	20	368.58 ± 2601.12	365.83 ± 2539.35	2.23 ± 2.46	89.12 ± 874.27	0.29 ± 1.07	0.04 ± 0.10	228.32 ± 842.15
	30	4.15 ± 3.59	2.77 ± 3.34	97.37 ± 954.14	0.70 ± 0.94	0.19 ± 0.51	0.03 ± 0.08	14.12 ± 93.45
0.6	5	17799.05 ± 61863.01	25863.15 ± 115762.70	20743.39 ± 99968.01	10481.40 ± 18184.67	25742.25 ± 140659.39	20976.52 ± 139943.62	39177.25 ± 170531.02
	10	3449.83 ± 8925.53	3290.77 ± 9398.83	1576.50 ± 6120.60	1608.32 ± 6843.27	1137.46 ± 5787.50	3.01 ± 27.66	1751.10 ± 4107.90
	15	2026.25 ± 6750.00	1316.61 ± 5313.24	636.35 ± 3444.26	291.29 ± 2875.30	0.34 ± 0.76	0.06 ± 0.10	269.87 ± 1084.96
	20	453.34 ± 3428.92	449.24 ± 3429.41	33.90 ± 313.72	119.30 ± 1178.35	0.25 ± 0.43	0.08 ± 0.34	2.80 ± 13.86
	30	4.09 ± 4.83	1.97 ± 1.75	1.50 ± 1.71	0.71 ± 1.08	0.11 ± 0.19	0.04 ± 0.16	0.14 ± 0.44
0.8	5	36157.87 ± 146330.06	34450.51 ± 146506.74	30019.30 ± 140313.63	15977.16 ± 58821.61	6873.03 ± 18554.97	21615.29 ± 139922.80	77997.81 ± 247090.99
	10	5417.65 ± 11862.25	4839.38 ± 11554.90	1822.69 ± 6395.80	2273.29 ± 7839.21	0.57 ± 0.96	537.97 ± 3885.96	349.85 ± 2382.94
	15	1254.02 ± 5947.79	643.24 ± 3182.34	645.34 ± 3822.18	724.63 ± 4263.77	80.86 ± 800.50	0.12 ± 0.33	1.76 ± 13.85
	20	868.40 ± 4396.10	247.03 ± 2419.05	2.27 ± 2.75	1.21 ± 2.67	0.21 ± 0.49	0.04 ± 0.06	0.30 ± 0.63
	30	125.32 ± 1192.15	2.84 ± 2.58	1.35 ± 1.42	0.57 ± 0.86	0.11 ± 0.27	0.01 ± 0.03	0.12 ± 0.45
1.0	5	12710.59 ± 18863.09	12751.53 ± 19444.39	22212.70 ± 99922.73	31263.91 ± 126752.34	13928.86 ± 99595.42	32024.01 ± 170764.29	21711.04 ± 139860.18
	10	3375.54 ± 8247.71	2597.36 ± 7301.79	2926.65 ± 8584.70	1618.08 ± 6299.08	674.54 ± 4299.40	0.12 ± 0.27	0.21 ± 0.59
	15	2346.73 ± 8012.50	1195.23 ± 5442.06	198.80 ± 1949.90	105.24 ± 1026.53	0.36 ± 0.81	0.04 ± 0.07	0.21 ± 0.74
	20	486.85 ± 3373.38	259.51 ± 2546.92	123.83 ± 1203.66	0.97 ± 1.40	0.16 ± 0.27	0.08 ± 0.42	0.13 ± 0.39
	30	3.98 ± 3.59	3.74 ± 7.37	7.76 ± 60.44	0.67 ± 1.02	0.14 ± 0.29	0.02 ± 0.03	0.00 ± 0.04

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.9: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 4

		V4						none
iw	opt	expl						-
		0	20	40	80	160	320	
0.3	5	38791.65 ± 169524.56	36915.47 ± 169669.19	5858.84 ± 7688.61	25765.68 ± 139397.98	58200.55 ± 216366.67	29450.68 ± 142233.10	56099.53 ± 178735.97
	10	3269.56 ± 4937.85	2376.08 ± 3430.18	2287.74 ± 4350.69	12322.93 ± 99359.01	12856.66 ± 99328.59	12732.41 ± 99346.17	5297.07 ± 14840.48
	15	1862.07 ± 4098.17	1477.63 ± 3092.43	630.29 ± 1321.05	607.47 ± 1439.53	1275.00 ± 2366.43	1084.13 ± 2564.98	1253.05 ± 2800.49
	20	882.14 ± 2391.33	616.25 ± 1656.01	476.70 ± 1199.75	295.15 ± 932.56	368.35 ± 1195.86	267.67 ± 707.05	602.07 ± 2736.49
	30	139.45 ± 473.67	117.47 ± 647.82	38.72 ± 172.19	91.43 ± 354.61	144.99 ± 467.47	120.20 ± 629.32	67.62 ± 465.86
0.4	5	40059.60 ± 169352.55	37372.87 ± 169603.19	25745.03 ± 139553.95	25866.49 ± 139669.16	60620.84 ± 217757.47	43001.16 ± 176568.72	68694.83 ± 198355.13
	10	14095.57 ± 99303.61	13019.92 ± 99300.62	1722.86 ± 2561.62	1990.46 ± 3754.68	2481.63 ± 4650.84	1715.52 ± 3435.88	13403.41 ± 99397.37
	15	1389.61 ± 2665.95	10879.60 ± 99431.36	1016.76 ± 2333.13	801.26 ± 1583.43	657.93 ± 1832.51	824.29 ± 2193.84	10575.84 ± 99464.18
	20	1224.44 ± 3005.45	868.98 ± 2115.21	402.28 ± 1354.19	303.75 ± 952.52	232.81 ± 768.74	341.85 ± 915.29	375.30 ± 1474.47
	30	329.58 ± 886.05	194.86 ± 581.50	148.91 ± 796.33	95.30 ± 360.00	206.54 ± 785.81	22.36 ± 115.05	35.73 ± 169.41
0.6	5	46092.40 ± 194949.63	44486.07 ± 195176.05	33665.48 ± 170020.80	10017.75 ± 50432.87	56755.42 ± 216884.87	36260.11 ± 169706.76	59256.87 ± 204584.94
	10	2185.69 ± 4532.92	1589.27 ± 2955.37	1670.70 ± 3180.18	1014.52 ± 2530.15	1658.39 ± 3565.71	1714.50 ± 5295.06	1105.94 ± 3509.17
	15	1214.20 ± 2598.25	732.69 ± 1781.51	526.00 ± 1479.58	407.15 ± 1289.46	302.16 ± 1252.55	500.10 ± 1522.78	142.58 ± 790.46
	20	426.52 ± 1220.71	285.94 ± 1141.01	95.50 ± 434.65	57.87 ± 340.59	43.02 ± 254.76	43.69 ± 240.96	9.54 ± 53.88
	30	151.36 ± 549.33	52.65 ± 280.10	104.85 ± 705.05	9.20 ± 91.21	4.09 ± 32.20	1.59 ± 15.20	0.28 ± 0.68
0.8	5	70447.73 ± 237727.33	64734.13 ± 236396.82	34743.26 ± 169958.62	33576.18 ± 170068.63	42950.58 ± 195426.22	57457.60 ± 218216.06	71562.36 ± 245688.53
	10	1881.19 ± 3257.66	1019.58 ± 1894.50	760.36 ± 2138.27	648.24 ± 1875.75	368.04 ± 1260.67	625.92 ± 2027.55	120.09 ± 534.86
	15	1320.35 ± 3546.48	395.37 ± 1271.07	111.57 ± 532.09	96.02 ± 494.56	102.64 ± 464.41	0.23 ± 1.35	0.43 ± 0.87
	20	313.48 ± 1179.51	55.24 ± 241.59	93.47 ± 578.36	7.31 ± 43.70	0.62 ± 5.10	0.11 ± 0.41	0.32 ± 0.76
	30	18.98 ± 118.45	32.93 ± 230.25	0.66 ± 6.51	0.02 ± 0.19	0.01 ± 0.08	0.02 ± 0.19	0.17 ± 0.46
1.0	5	56829.97 ± 216711.96	53411.73 ± 217298.25	32503.61 ± 170210.46	52110.27 ± 217491.02	21913.04 ± 139813.25	42349.90 ± 195554.60	52899.28 ± 217434.83
	10	1422.97 ± 2745.82	579.87 ± 1563.19	562.04 ± 2053.85	85.63 ± 446.23	1.60 ± 10.79	65.35 ± 460.21	0.38 ± 0.84
	15	287.17 ± 1087.77	20.68 ± 130.82	18.79 ± 147.01	0.03 ± 0.17	0.08 ± 0.33	0.10 ± 0.41	0.14 ± 0.44
	20	3.90 ± 30.97	0.01 ± 0.02	0.01 ± 0.01	0.02 ± 0.17	0.05 ± 0.22	0.01 ± 0.05	0.15 ± 0.49
	30	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.00	0.00 ± 0.03	0.02 ± 0.11	0.02 ± 0.17

Tabelle D.10: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Rosenbrock-Funktion im Vektorfeld 5

		V5						none
iw	opt	expl						-
		0	20	40	80	160	320	
0.3	5	23991.67 ± 47875.39	5879.12 ± 16325.50	5369.14 ± 11687.50	14246.19 ± 99791.06	14243.96 ± 99685.00	12974.96 ± 99614.20	85941.81 ± 227595.24
	10	5678.83 ± 11112.57	1511.13 ± 4091.73	919.49 ± 2011.20	1222.58 ± 3448.49	376.82 ± 1376.88	154.03 ± 1478.24	16523.11 ± 96079.43
	15	2827.46 ± 6332.74	578.30 ± 1431.59	505.50 ± 1222.71	178.16 ± 605.78	37.58 ± 233.55	4.47 ± 30.68	1481.90 ± 4592.27
	20	1576.69 ± 3377.27	506.21 ± 1695.86	203.11 ± 759.94	52.82 ± 205.33	20.50 ± 99.65	0.23 ± 1.55	389.35 ± 1071.26
	30	561.40 ± 1590.46	37.14 ± 142.16	117.27 ± 512.19	39.80 ± 199.20	0.35 ± 0.74	0.15 ± 0.86	65.05 ± 374.73
0.4	5	24839.28 ± 51839.76	7099.73 ± 14058.94	8872.82 ± 36232.06	3186.35 ± 10180.57	2616.91 ± 6086.08	22750.44 ± 139826.42	75650.62 ± 208020.32
	10	3504.47 ± 7668.88	580.74 ± 1292.24	844.33 ± 2320.35	871.50 ± 2334.60	307.41 ± 1205.16	18.24 ± 163.30	2335.92 ± 11096.29
	15	1711.36 ± 2849.32	450.12 ± 1578.58	369.58 ± 1205.47	224.39 ± 631.69	69.94 ± 267.54	0.30 ± 0.97	463.71 ± 1291.59
	20	1203.06 ± 2256.50	276.56 ± 1001.72	235.92 ± 860.75	68.00 ± 328.15	17.19 ± 70.50	0.11 ± 0.25	143.91 ± 536.98
	30	368.93 ± 758.41	40.92 ± 171.36	13.59 ± 53.81	15.46 ± 88.51	4.88 ± 33.48	0.44 ± 4.04	11.35 ± 82.52
0.6	5	17081.25 ± 27442.88	5813.87 ± 13413.60	6171.47 ± 12532.82	23387.76 ± 140019.36	1406.72 ± 5228.49	21915.71 ± 139904.08	69986.58 ± 224918.41
	10	7375.53 ± 14396.21	1048.75 ± 2648.87	1222.52 ± 2674.23	422.23 ± 1426.44	26.43 ± 112.38	212.36 ± 2087.66	1010.32 ± 2530.53
	15	1783.22 ± 3376.77	308.24 ± 1000.94	317.03 ± 827.62	104.45 ± 284.08	12.61 ± 88.20	0.12 ± 0.39	47.53 ± 293.03
	20	1026.30 ± 2138.78	135.82 ± 489.48	117.71 ± 390.42	35.54 ± 211.28	10.65 ± 51.42	0.05 ± 0.14	11.85 ± 78.91
	30	878.68 ± 2423.38	71.61 ± 238.85	7.62 ± 27.94	38.02 ± 339.50	0.24 ± 0.89	0.03 ± 0.09	0.13 ± 0.44
0.8	5	19724.72 ± 43622.11	7406.31 ± 24856.39	14749.21 ± 99498.81	2832.58 ± 8404.11	2796.43 ± 8381.17	11904.33 ± 99524.83	46353.29 ± 195786.25
	10	5083.03 ± 9787.98	982.24 ± 2883.51	435.18 ± 1502.40	494.38 ± 1691.76	193.43 ± 1227.73	6.04 ± 41.78	58.86 ± 353.90
	15	2672.07 ± 5539.09	429.49 ± 2022.08	246.00 ± 871.31	65.60 ± 260.10	19.96 ± 100.57	7.89 ± 75.93	0.36 ± 0.86
	20	986.61 ± 2376.51	391.15 ± 1884.94	144.30 ± 645.81	21.03 ± 174.04	7.08 ± 42.11	0.04 ± 0.12	0.34 ± 0.76
	30	322.90 ± 809.58	12.04 ± 59.40	17.40 ± 121.41	35.85 ± 323.23	0.17 ± 0.44	0.04 ± 0.11	0.15 ± 0.52
1.0	5	8767.45 ± 13366.22	3878.28 ± 10648.25	13717.90 ± 99893.51	12211.42 ± 99446.92	2186.42 ± 6230.92	21654.49 ± 139927.14	16305.77 ± 114354.29
	10	3937.63 ± 7920.83	602.85 ± 1849.51	1087.57 ± 5410.61	348.74 ± 1339.93	47.19 ± 207.52	9.30 ± 91.10	0.30 ± 0.74
	15	2775.69 ± 5970.28	369.68 ± 1239.43	231.60 ± 1004.21	191.10 ± 660.54	2.77 ± 17.53	0.39 ± 3.26	0.19 ± 0.56
	20	1131.47 ± 2151.81	135.61 ± 477.54	180.24 ± 981.53	25.61 ± 162.58	0.29 ± 0.69	0.05 ± 0.09	0.07 ± 0.30
	30	517.34 ± 1475.11	171.15 ± 1441.18	8.58 ± 48.68	0.24 ± 0.64	0.32 ± 1.50	0.01 ± 0.03	0.03 ± 0.16

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.11: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 1

		V1						none
iw	opt \ expl	0	20	40	80	160	320	-
		0.3	5	11.66 ± 5.08	11.06 ± 5.16	9.67 ± 4.98	7.16 ± 5.14	4.68 ± 4.58
	10	8.21 ± 4.47	7.86 ± 4.54	7.07 ± 4.23	3.64 ± 3.04	1.91 ± 2.06	1.60 ± 2.54	6.11 ± 4.87
	15	7.43 ± 4.33	6.31 ± 3.78	4.76 ± 3.58	2.62 ± 1.83	1.23 ± 1.09	0.70 ± 1.82	4.58 ± 4.53
	20	6.16 ± 3.59	5.38 ± 3.47	4.20 ± 3.14	2.10 ± 1.71	1.09 ± 1.40	0.28 ± 0.55	3.03 ± 3.47
	30	4.63 ± 2.82	3.82 ± 2.34	2.78 ± 2.01	1.82 ± 1.69	0.87 ± 1.11	0.10 ± 0.16	1.27 ± 2.32
0.4	5	11.61 ± 4.23	10.77 ± 4.59	8.87 ± 5.21	6.83 ± 4.86	4.69 ± 5.01	3.75 ± 5.13	9.62 ± 4.89
	10	8.03 ± 4.45	7.15 ± 4.36	5.15 ± 3.51	3.83 ± 2.76	1.84 ± 2.60	1.50 ± 3.23	5.45 ± 5.39
	15	6.88 ± 4.01	6.09 ± 3.95	4.15 ± 2.98	2.53 ± 2.02	1.20 ± 1.32	0.57 ± 1.39	3.76 ± 4.15
	20	5.41 ± 3.36	4.94 ± 3.27	3.94 ± 2.64	1.97 ± 1.73	0.80 ± 0.93	0.34 ± 0.69	2.14 ± 3.23
	30	4.89 ± 3.00	4.23 ± 2.81	2.86 ± 2.03	1.88 ± 1.35	0.67 ± 0.77	0.19 ± 0.39	1.52 ± 2.60
0.6	5	11.50 ± 5.23	10.75 ± 5.20	9.26 ± 4.89	6.17 ± 5.14	4.06 ± 4.83	3.44 ± 5.31	9.58 ± 5.68
	10	7.86 ± 4.22	7.17 ± 4.17	6.33 ± 4.10	3.30 ± 3.26	1.61 ± 1.83	0.76 ± 1.79	4.20 ± 4.66
	15	6.94 ± 4.06	6.12 ± 3.86	4.38 ± 3.03	2.42 ± 1.74	1.10 ± 1.79	0.43 ± 1.06	2.60 ± 4.06
	20	6.31 ± 3.74	5.13 ± 3.37	3.76 ± 2.69	1.76 ± 1.42	0.94 ± 1.08	0.13 ± 0.19	1.83 ± 3.27
	30	4.79 ± 2.83	4.07 ± 2.62	3.07 ± 2.30	1.71 ± 1.49	0.65 ± 0.73	0.16 ± 0.26	0.23 ± 1.28
0.8	5	11.41 ± 4.40	10.57 ± 4.48	8.25 ± 5.24	5.74 ± 4.86	4.00 ± 4.58	2.83 ± 5.09	8.99 ± 5.71
	10	8.47 ± 3.85	7.04 ± 4.01	5.62 ± 4.16	3.36 ± 2.95	1.09 ± 1.06	0.36 ± 0.59	3.01 ± 4.22
	15	7.39 ± 4.24	6.28 ± 4.13	3.75 ± 2.69	2.08 ± 1.70	0.96 ± 0.91	0.27 ± 0.49	1.09 ± 2.97
	20	6.45 ± 3.86	4.99 ± 3.40	3.11 ± 2.49	1.73 ± 1.40	0.76 ± 0.83	0.21 ± 0.35	0.33 ± 1.55
	30	4.94 ± 2.90	4.14 ± 2.83	2.58 ± 2.05	1.36 ± 1.16	0.48 ± 0.55	0.14 ± 0.23	0.00 ± 0.00
1.0	5	10.95 ± 4.87	10.04 ± 5.33	8.83 ± 5.27	5.34 ± 4.22	2.88 ± 3.80	1.41 ± 3.03	6.78 ± 6.56
	10	8.10 ± 4.74	6.93 ± 4.49	5.37 ± 3.97	2.46 ± 2.25	1.14 ± 1.18	0.53 ± 1.47	1.05 ± 2.99
	15	6.84 ± 3.96	5.85 ± 3.84	3.64 ± 2.86	1.84 ± 1.43	0.82 ± 0.84	0.30 ± 0.36	0.34 ± 1.40
	20	5.62 ± 3.45	4.63 ± 3.29	3.07 ± 2.27	1.51 ± 1.58	0.80 ± 0.87	0.21 ± 0.34	0.00 ± 0.00
	30	4.84 ± 3.21	4.11 ± 2.85	2.72 ± 1.89	1.21 ± 1.08	0.56 ± 0.66	0.11 ± 0.19	0.00 ± 0.00

Tabelle D.12: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 2

		V2						none
iw	opt \ expl	0	20	40	80	160	320	-
		0.3	5	8.57 ± 3.46	3.74 ± 3.58	2.01 ± 2.87	2.12 ± 3.03	3.49 ± 3.76
	10	6.69 ± 3.31	2.56 ± 2.70	0.73 ± 0.98	0.80 ± 1.45	1.61 ± 2.78	2.51 ± 3.59	6.39 ± 4.86
	15	5.46 ± 2.99	1.59 ± 1.65	0.42 ± 0.60	0.64 ± 1.55	0.98 ± 2.08	1.34 ± 2.43	4.01 ± 4.22
	20	4.75 ± 2.39	1.25 ± 1.22	0.46 ± 0.78	0.26 ± 0.80	0.37 ± 1.12	0.88 ± 2.15	3.03 ± 3.57
	30	4.21 ± 2.15	0.99 ± 0.93	0.35 ± 0.64	0.12 ± 0.28	0.06 ± 0.26	0.41 ± 1.42	1.40 ± 2.32
0.4	5	9.12 ± 3.35	3.61 ± 3.25	1.92 ± 2.41	2.03 ± 3.06	3.71 ± 4.22	5.01 ± 5.14	9.28 ± 5.83
	10	6.95 ± 3.10	1.95 ± 2.25	0.98 ± 1.34	0.80 ± 1.55	1.14 ± 2.35	2.23 ± 3.38	6.57 ± 4.80
	15	5.58 ± 2.84	1.52 ± 1.40	0.49 ± 0.69	0.36 ± 0.86	0.90 ± 2.11	1.11 ± 2.59	3.27 ± 3.93
	20	4.95 ± 2.85	1.21 ± 1.77	0.43 ± 0.63	0.29 ± 0.93	0.29 ± 1.10	0.43 ± 1.34	2.53 ± 3.71
	30	4.12 ± 2.30	1.13 ± 1.41	0.29 ± 0.35	0.19 ± 0.64	0.08 ± 0.36	0.30 ± 0.95	1.07 ± 2.48
0.6	5	8.80 ± 3.59	3.37 ± 2.77	1.44 ± 2.18	1.06 ± 2.06	2.23 ± 3.33	5.14 ± 5.31	9.87 ± 5.37
	10	6.81 ± 3.05	1.67 ± 1.88	0.59 ± 0.62	0.40 ± 0.94	0.89 ± 2.23	1.27 ± 2.89	4.97 ± 5.46
	15	5.67 ± 2.66	1.24 ± 1.07	0.44 ± 0.46	0.20 ± 0.31	0.35 ± 1.63	0.47 ± 1.66	2.20 ± 3.64
	20	4.64 ± 2.42	0.97 ± 0.96	0.34 ± 0.39	0.14 ± 0.25	0.12 ± 0.50	0.28 ± 1.28	0.73 ± 1.96
	30	3.64 ± 2.15	0.80 ± 0.77	0.23 ± 0.27	0.13 ± 0.18	0.03 ± 0.05	0.01 ± 0.01	0.28 ± 1.35
0.8	5	8.84 ± 3.38	2.80 ± 2.67	0.98 ± 0.85	0.93 ± 1.92	1.15 ± 2.30	2.69 ± 4.39	8.19 ± 5.94
	10	7.07 ± 2.91	1.66 ± 1.43	0.68 ± 0.70	0.33 ± 0.83	0.23 ± 0.95	0.64 ± 2.13	3.00 ± 4.56
	15	5.86 ± 2.67	1.19 ± 1.21	0.47 ± 0.52	0.21 ± 0.34	0.05 ± 0.06	0.07 ± 0.36	1.65 ± 3.58
	20	4.69 ± 2.27	0.91 ± 0.87	0.41 ± 0.45	0.18 ± 0.23	0.10 ± 0.49	0.04 ± 0.26	0.20 ± 1.05
	30	4.25 ± 2.24	0.71 ± 0.74	0.27 ± 0.29	0.11 ± 0.12	0.03 ± 0.05	0.01 ± 0.02	0.07 ± 0.68
1.0	5	8.87 ± 3.51	2.51 ± 2.17	1.12 ± 0.91	0.56 ± 0.56	0.59 ± 1.54	1.15 ± 3.04	7.69 ± 6.51
	10	7.02 ± 2.80	1.51 ± 1.39	0.67 ± 0.65	0.39 ± 0.47	0.12 ± 0.21	0.08 ± 0.36	0.93 ± 2.57
	15	5.59 ± 2.65	1.05 ± 1.00	0.44 ± 0.50	0.19 ± 0.24	0.07 ± 0.11	0.03 ± 0.05	0.16 ± 1.37
	20	4.95 ± 2.67	1.05 ± 0.89	0.37 ± 0.34	0.17 ± 0.24	0.05 ± 0.07	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00
	30	4.20 ± 2.23	0.81 ± 0.79	0.24 ± 0.25	0.09 ± 0.13	0.03 ± 0.07	0.01 ± 0.04	0.00 ± 0.00

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.13: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 3

		V3						none
		0	20	40	80	160	320	-
iw	expl							
	opt							
0.3	5	9.86 ± 4.94	9.02 ± 5.37	7.24 ± 5.30	5.85 ± 5.86	3.86 ± 5.28	2.34 ± 4.63	11.20 ± 5.31
	10	6.65 ± 4.01	5.11 ± 3.74	3.92 ± 2.28	2.03 ± 1.37	0.98 ± 1.85	0.31 ± 0.43	6.53 ± 5.25
	15	5.07 ± 1.96	3.71 ± 1.96	2.93 ± 1.79	1.90 ± 1.93	0.75 ± 0.79	0.12 ± 0.14	3.85 ± 4.20
	20	4.41 ± 2.23	3.52 ± 2.07	2.73 ± 2.21	1.29 ± 1.04	0.53 ± 0.57	0.16 ± 0.21	3.09 ± 3.55
	30	3.69 ± 1.72	2.80 ± 1.69	1.90 ± 1.57	1.22 ± 1.04	0.45 ± 0.54	0.10 ± 0.15	1.50 ± 2.41
0.4	5	8.89 ± 4.78	7.81 ± 5.12	7.23 ± 5.48	5.20 ± 5.28	3.12 ± 4.99	1.64 ± 3.85	9.71 ± 5.71
	10	5.94 ± 3.30	4.79 ± 3.15	3.21 ± 2.07	2.11 ± 2.07	1.11 ± 1.90	0.27 ± 0.39	5.04 ± 5.26
	15	4.99 ± 2.03	3.77 ± 1.81	3.02 ± 1.45	1.74 ± 1.28	0.67 ± 0.73	0.23 ± 0.42	3.55 ± 3.97
	20	4.43 ± 2.06	3.37 ± 2.16	2.48 ± 1.38	1.43 ± 1.21	0.52 ± 0.55	0.18 ± 0.23	2.28 ± 3.48
	30	3.33 ± 1.60	2.50 ± 1.42	1.78 ± 1.32	1.18 ± 1.06	0.42 ± 0.54	0.10 ± 0.11	0.87 ± 1.89
0.6	5	8.63 ± 4.52	7.80 ± 4.76	6.99 ± 5.61	4.86 ± 5.15	3.26 ± 5.00	2.53 ± 5.03	9.39 ± 5.46
	10	6.01 ± 2.76	4.85 ± 3.13	4.18 ± 3.47	2.18 ± 2.09	0.82 ± 0.87	0.42 ± 1.34	4.45 ± 4.92
	15	5.19 ± 1.91	3.78 ± 1.94	2.61 ± 1.45	1.68 ± 1.26	0.61 ± 0.63	0.19 ± 0.21	2.78 ± 3.81
	20	4.41 ± 2.03	3.13 ± 1.88	2.56 ± 1.49	1.29 ± 1.16	0.44 ± 0.48	0.15 ± 0.19	1.16 ± 2.86
	30	3.50 ± 1.69	2.59 ± 1.50	1.91 ± 1.44	1.15 ± 1.06	0.34 ± 0.39	0.11 ± 0.13	0.16 ± 0.73
0.8	5	8.63 ± 4.47	7.06 ± 4.52	5.82 ± 5.00	5.32 ± 5.28	2.49 ± 4.16	2.13 ± 4.76	7.22 ± 6.18
	10	5.72 ± 3.02	4.36 ± 2.52	3.67 ± 3.38	2.14 ± 1.21	1.13 ± 1.88	0.19 ± 0.26	4.14 ± 5.33
	15	5.17 ± 2.60	3.48 ± 2.19	2.71 ± 1.39	1.51 ± 1.25	0.70 ± 0.66	0.21 ± 0.21	0.66 ± 2.42
	20	4.44 ± 2.21	3.18 ± 1.66	2.29 ± 1.48	1.27 ± 1.06	0.44 ± 0.47	0.19 ± 0.24	0.31 ± 1.16
	30	3.35 ± 1.60	2.46 ± 1.53	1.96 ± 1.37	1.14 ± 1.07	0.39 ± 0.40	0.13 ± 0.15	0.00 ± 0.00
1.0	5	10.05 ± 4.78	8.71 ± 5.20	6.95 ± 5.36	3.68 ± 3.83	3.16 ± 5.25	1.24 ± 3.42	7.36 ± 6.46
	10	6.14 ± 2.97	4.66 ± 3.04	3.85 ± 2.98	2.07 ± 1.98	0.93 ± 0.79	0.30 ± 0.32	1.29 ± 3.31
	15	4.96 ± 2.04	3.45 ± 1.76	2.56 ± 1.71	1.55 ± 1.95	0.71 ± 0.71	0.25 ± 0.24	0.33 ± 1.44
	20	4.22 ± 2.00	3.12 ± 1.61	2.29 ± 1.23	1.47 ± 1.12	0.53 ± 0.49	0.19 ± 0.32	0.00 ± 0.00
	30	3.48 ± 1.81	2.58 ± 1.45	1.69 ± 1.34	1.06 ± 1.00	0.31 ± 0.38	0.12 ± 0.14	0.00 ± 0.00

Tabelle D.14: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 4

		V4						none
		0	20	40	80	160	320	-
iw	expl							
	opt							
0.3	5	9.93 ± 5.33	10.05 ± 5.64	8.57 ± 5.38	9.59 ± 6.01	8.94 ± 5.61	8.60 ± 5.49	10.95 ± 5.50
	10	5.49 ± 4.11	5.40 ± 4.30	5.79 ± 4.82	5.17 ± 4.89	4.91 ± 5.09	5.27 ± 4.96	5.69 ± 4.90
	15	4.04 ± 3.32	3.50 ± 3.43	3.75 ± 4.19	4.21 ± 4.32	2.84 ± 3.67	2.99 ± 3.94	3.68 ± 3.90
	20	2.97 ± 3.11	2.70 ± 3.21	3.22 ± 3.42	2.17 ± 2.72	2.03 ± 2.98	2.09 ± 2.87	2.66 ± 3.42
	30	1.89 ± 2.23	1.69 ± 2.07	1.70 ± 2.44	1.57 ± 2.20	1.41 ± 2.05	1.20 ± 2.42	1.69 ± 2.51
0.4	5	9.62 ± 5.70	9.50 ± 5.91	8.16 ± 5.70	9.55 ± 5.53	8.20 ± 5.72	10.32 ± 5.80	10.15 ± 5.67
	10	5.65 ± 4.69	5.28 ± 4.58	4.53 ± 4.56	5.25 ± 4.83	5.42 ± 5.33	5.34 ± 5.35	5.60 ± 4.88
	15	4.18 ± 3.83	3.49 ± 3.78	3.96 ± 3.66	3.46 ± 4.21	3.37 ± 3.61	3.07 ± 4.18	3.76 ± 4.41
	20	2.88 ± 2.87	2.55 ± 2.91	2.40 ± 3.11	2.46 ± 3.09	1.74 ± 2.93	2.36 ± 3.70	2.55 ± 3.31
	30	1.74 ± 1.95	1.58 ± 1.87	1.68 ± 2.45	1.08 ± 1.99	1.08 ± 2.04	0.72 ± 1.59	0.89 ± 1.81
0.6	5	8.03 ± 5.71	7.87 ± 5.74	8.82 ± 5.89	7.32 ± 5.94	8.61 ± 5.97	9.27 ± 5.90	8.32 ± 6.11
	10	4.83 ± 4.66	4.67 ± 4.80	5.01 ± 4.77	3.85 ± 4.42	4.46 ± 5.35	4.30 ± 4.90	4.56 ± 5.36
	15	3.33 ± 3.54	3.13 ± 3.56	2.58 ± 3.62	2.29 ± 3.28	2.02 ± 3.82	2.29 ± 3.82	2.44 ± 3.97
	20	2.33 ± 2.95	1.81 ± 2.55	1.83 ± 2.87	1.59 ± 2.92	0.54 ± 1.62	0.81 ± 1.86	1.21 ± 2.75
	30	1.36 ± 1.75	0.91 ± 1.51	1.02 ± 1.66	0.53 ± 1.35	0.53 ± 1.62	0.24 ± 0.93	0.13 ± 0.65
0.8	5	8.02 ± 5.71	7.59 ± 5.65	7.16 ± 6.01	8.46 ± 6.32	6.32 ± 6.40	6.66 ± 5.86	8.95 ± 5.81
	10	4.63 ± 4.39	3.50 ± 4.58	3.47 ± 4.74	3.16 ± 4.25	3.02 ± 4.37	2.68 ± 4.52	3.34 ± 4.83
	15	2.63 ± 3.59	2.06 ± 3.40	1.47 ± 3.13	1.49 ± 3.17	1.44 ± 3.22	1.04 ± 3.00	0.91 ± 2.48
	20	1.55 ± 2.77	1.18 ± 2.38	0.75 ± 1.69	0.62 ± 1.79	0.29 ± 1.22	0.40 ± 1.83	0.12 ± 0.73
	30	0.63 ± 1.75	0.54 ± 1.51	0.31 ± 1.20	0.04 ± 0.03	0.05 ± 0.26	0.09 ± 0.55	0.00 ± 0.00
1.0	5	6.88 ± 6.03	6.21 ± 5.77	6.40 ± 6.15	5.36 ± 6.12	5.34 ± 6.12	5.48 ± 6.27	6.76 ± 6.34
	10	3.34 ± 4.64	2.22 ± 3.86	1.56 ± 3.31	1.40 ± 3.29	1.10 ± 3.13	1.17 ± 3.24	1.37 ± 3.65
	15	1.76 ± 3.54	1.24 ± 3.38	0.44 ± 1.30	0.25 ± 1.32	0.23 ± 1.26	0.02 ± 0.03	0.18 ± 1.59
	20	0.51 ± 1.76	0.36 ± 1.39	0.15 ± 0.59	0.07 ± 0.21	0.04 ± 0.05	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00
	30	0.09 ± 0.26	0.07 ± 0.26	0.07 ± 0.26	0.04 ± 0.04	0.02 ± 0.03	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.00

D Mittlerer Fehler

Tabelle D.15: Mittelwerte und Standardabweichungen für die experimentelle Analyse der Ackley-Funktion im Vektorfeld 5

		V5						none
		0	20	40	80	160	320	-
iw	expl							
	opt							
0.3	5	8.61 ± 3.92	3.96 ± 2.88	3.78 ± 2.98	4.22 ± 3.59	3.02 ± 3.02	2.54 ± 4.00	10.49 ± 5.02
	10	5.84 ± 2.99	2.45 ± 2.02	2.19 ± 1.54	2.04 ± 1.85	1.57 ± 1.95	0.85 ± 1.51	5.62 ± 5.01
	15	4.68 ± 2.38	1.69 ± 1.39	1.72 ± 1.57	1.70 ± 1.75	1.00 ± 1.15	0.34 ± 0.86	3.27 ± 3.84
	20	4.74 ± 2.50	1.99 ± 1.74	1.56 ± 1.37	1.27 ± 1.14	0.87 ± 1.19	0.38 ± 0.76	3.04 ± 3.63
	30	3.60 ± 2.11	1.51 ± 1.37	1.18 ± 1.14	0.99 ± 1.08	0.50 ± 0.67	0.14 ± 0.40	1.71 ± 2.61
0.4	5	8.52 ± 3.82	4.07 ± 3.17	3.39 ± 3.36	3.78 ± 3.63	3.31 ± 3.28	2.50 ± 3.98	9.82 ± 5.33
	10	6.02 ± 3.41	2.44 ± 2.08	2.07 ± 1.78	2.09 ± 1.78	1.78 ± 1.83	0.69 ± 1.46	5.35 ± 5.02
	15	5.11 ± 2.89	2.04 ± 1.73	1.63 ± 1.25	1.45 ± 1.48	1.04 ± 1.21	0.38 ± 0.86	3.84 ± 4.51
	20	4.61 ± 2.56	1.82 ± 1.44	1.33 ± 1.03	1.31 ± 1.42	0.83 ± 1.05	0.12 ± 0.38	2.83 ± 3.56
	30	3.49 ± 1.72	1.15 ± 1.21	1.15 ± 1.27	0.84 ± 0.88	0.54 ± 0.72	0.08 ± 0.17	0.92 ± 1.86
0.6	5	9.09 ± 3.72	3.11 ± 2.15	3.30 ± 2.70	3.05 ± 2.75	2.34 ± 2.14	2.05 ± 3.74	10.11 ± 5.63
	10	6.77 ± 3.34	2.17 ± 2.06	2.06 ± 1.71	1.70 ± 1.31	1.30 ± 1.65	0.40 ± 0.69	5.22 ± 5.22
	15	5.09 ± 2.92	1.80 ± 1.97	1.32 ± 1.26	1.23 ± 1.26	0.78 ± 0.91	0.24 ± 0.49	2.88 ± 4.41
	20	4.54 ± 2.45	1.64 ± 1.42	1.21 ± 1.07	1.20 ± 1.17	0.72 ± 1.16	0.19 ± 0.46	1.18 ± 2.61
	30	3.59 ± 1.81	1.09 ± 1.28	1.01 ± 1.00	0.68 ± 0.80	0.48 ± 0.81	0.08 ± 0.14	0.22 ± 1.26
0.8	5	9.15 ± 4.02	3.44 ± 3.11	3.45 ± 3.14	2.71 ± 2.91	2.14 ± 2.41	1.52 ± 3.36	9.28 ± 5.74
	10	6.67 ± 3.00	1.89 ± 1.69	1.99 ± 2.01	1.55 ± 1.14	1.02 ± 1.06	0.37 ± 0.68	3.63 ± 5.44
	15	5.00 ± 2.95	1.46 ± 1.29	1.18 ± 1.12	1.14 ± 1.11	0.65 ± 0.75	0.31 ± 0.59	1.05 ± 2.78
	20	4.08 ± 2.41	1.30 ± 1.38	1.18 ± 1.27	0.92 ± 1.02	0.47 ± 0.58	0.23 ± 0.46	0.20 ± 1.08
	30	3.71 ± 2.10	1.16 ± 1.29	0.80 ± 0.92	0.70 ± 0.66	0.41 ± 0.65	0.07 ± 0.10	0.00 ± 0.00
1.0	5	8.23 ± 4.06	3.12 ± 2.66	2.56 ± 2.00	2.39 ± 1.89	1.75 ± 2.24	0.67 ± 0.88	6.14 ± 6.41
	10	6.12 ± 3.32	1.69 ± 1.69	1.66 ± 1.67	1.50 ± 1.42	0.92 ± 1.09	0.37 ± 0.50	0.97 ± 3.00
	15	5.36 ± 2.96	1.53 ± 1.67	1.09 ± 0.99	1.16 ± 0.97	0.65 ± 0.74	0.21 ± 0.28	0.10 ± 1.02
	20	4.27 ± 2.54	1.09 ± 1.27	0.97 ± 1.02	0.78 ± 0.76	0.52 ± 0.58	0.14 ± 0.16	0.00 ± 0.00
	30	3.45 ± 1.95	1.02 ± 1.10	0.71 ± 0.69	0.59 ± 0.70	0.40 ± 0.42	0.12 ± 0.24	0.00 ± 0.00

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Ort, Datum

Unterschrift